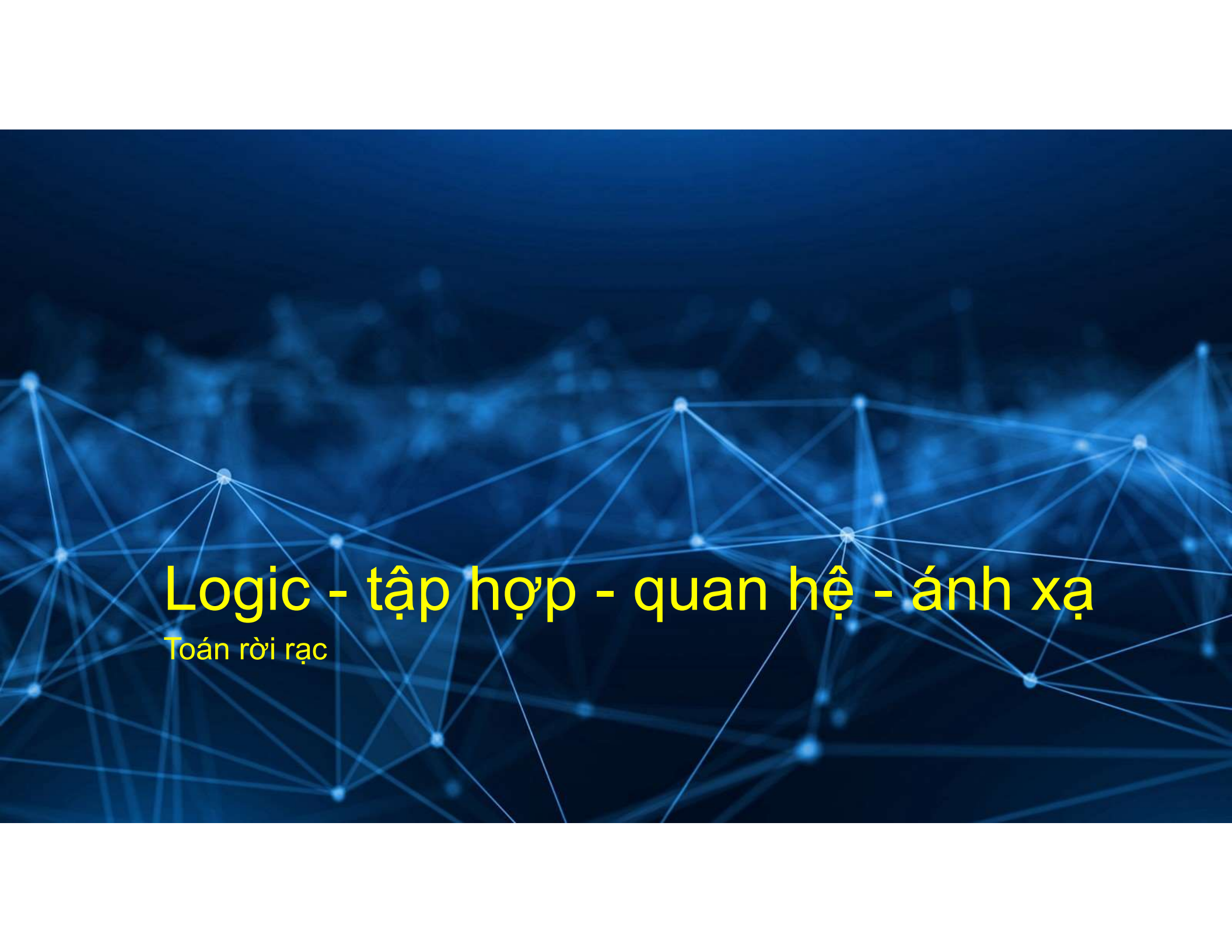


The background of the slide is a dark blue field filled with a complex, interconnected network of glowing blue lines and nodes. The nodes are small, bright blue spheres, and the lines are thin, light blue, creating a sense of depth and connectivity. The overall effect is reminiscent of a digital network or a molecular structure.

Logic - tập hợp - quan hệ - ánh xạ

Toán rời rạc



I. Logic

Mệnh đề và trị chân lý

Các phép toán mệnh đề

Hằng đúng và hằng sai (mâu thuẫn)

Tương đương logic

Lôgic vị từ





1. Mệnh đề và trị chân lý

- Mệnh đề (MĐ) là một khẳng định có giá trị chân lý xác định
 - Đúng hoặc Sai
 - ~~• Vừa đúng vừa sai~~
 - ~~• Không đúng không sai~~
 - MĐ đúng có trị chân lý là 1, MĐ sai có trị chân lý là 0.
- 



1. Mệnh đề và trị chân lý

- Mệnh đề:
 - Hai Bà Trưng là một huyện của Hà Nội.
 - “ $0 < 1$ ”
 - Tôi 5 tuổi.
 - Sydney là thủ đô của nước Úc.
 - Không phải mệnh đề
 - Bạn đi đâu đấy?
 - Đóng cửa sổ vào!
 - “ $x > 3$ ”
- 



1. Mệnh đề và trị chân lý

- A, B, P, Q, R, S, ...: kí hiệu mệnh đề
- Kí hiệu giá trị chân lý của mệnh đề:

Đúng	Sai
1	0
Đ	S
T	F

- Để đơn giản về mặt kí hiệu, khi viết A ta có thể hiểu là mệnh đề A hoặc giá trị chân lý của mệnh đề A tùy theo hoàn cảnh phù hợp.
 - **Bảng** chân trị: để biểu diễn tất cả các giá trị có thể có của một mệnh đề logic hoặc một biểu thức logic.
- 
- 



2. Các phép toán trong tập mệnh đề

Giả sử M là tập các mệnh đề; $A, B \in M$

a. Phép phủ định

- Mệnh đề “không phải là A ” là mệnh đề phủ định của A .
- Kí hiệu: $\bar{A}$ hoặc $\neg A = 1 - A$

b. Phép hội

- Mệnh đề “ A và B ” là mệnh đề hội của A và B .
- Kí hiệu: $A \wedge B = \min\{A, B\}$



2. Các phép toán trong tập mệnh đề

c. Phép tuyển

- Mệnh đề " A hoặc B " là mệnh đề tuyển của A và B .
- Kí hiệu: $A \vee B = \max\{A, B\}$

d. Phép kéo theo

- Mệnh đề "nếu A thì B " là mệnh đề A kéo theo B (mệnh đề chỉ sai nếu A đúng B sai).
 - Kí hiệu: $A \rightarrow B = \bar{A} \vee B = \max\{1 - A, B\}$
- 



2. Các phép toán trong tập mệnh đề

e. Phép tương đương

- Mệnh đề " A nếu và chỉ nếu B " là mệnh đề A tương đương B , nhận giá trị đúng khi A và B cùng đúng hoặc cùng sai.
- Kí hiệu: $A \leftrightarrow B$

2. Các phép toán trong tập mệnh đề

Chú ý:

- Một mệnh đề A gọi là MĐ đơn giản.
- Từ các MĐ đơn giản và các phép toán ta xây dựng được các MĐ phức tạp hơn. Các MĐ này được gọi là mệnh đề phức hợp hay biểu thức MĐ.
 - VD: $(A \rightarrow B) \rightarrow C$
- Thứ tự ưu tiên: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

$A \vee B \wedge C$	$A \vee (B \wedge C)$
$A \wedge B \rightarrow C \vee D$	$(A \wedge B) \rightarrow (C \vee D)$
$A \rightarrow B \vee C \leftrightarrow D$	$(A \rightarrow (B \vee C)) \leftrightarrow D$



3. Hằng đúng và hằng sai (mâu thuẫn)

- Mệnh đề phức hợp A gọi là **hằng đúng** nếu nó luôn đúng trong mọi trường hợp, kí hiệu là T (True).
- Mệnh đề phức hợp A gọi là **hằng sai** (mâu thuẫn) nếu nó luôn sai trong mọi trường hợp, kí hiệu là F (False).





4. Tương đương logic

- Hai mệnh đề A và B gọi là tương đương logic nếu mệnh đề $A \leftrightarrow B$ là hằng đúng.
- Kí hiệu: $A \Leftrightarrow B$.



Ví dụ

1. Chứng minh mệnh đề sau hằng đúng: $[\bar{A} \wedge (A \vee B)] \rightarrow B$

Cách làm:

- (1) Lập bảng giá trị chân lý
- (2) Biến đổi tương đương logic
- (3) Chứng minh bằng phản chứng



Ví dụ

1. Chứng minh mệnh đề sau hằng đúng: $[\bar{A} \wedge (A \vee B)] \rightarrow B$

Cách làm: (1) Lập bảng giá trị chân lý

A	B	$\bar{A}$	$A \vee B$	$\bar{A} \wedge (A \vee B)$	MĐ
1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	0	0	1

Mệnh đề là hằng đúng vì luôn có giá trị chân lý bằng 1.

Ví dụ

1. Chứng minh mệnh đề sau hằng đúng: $[\bar{A} \wedge (A \vee B)] \rightarrow B$

Cách làm: (2) Biến đổi tương đương lôgic

$$\begin{aligned} & [\bar{A} \wedge (A \vee B)] \rightarrow B \\ \Leftrightarrow & \overline{\bar{A} \wedge (A \vee B)} \vee B \\ \Leftrightarrow & \bar{\bar{A}} \vee \overline{(A \vee B)} \vee B \\ \Leftrightarrow & A \vee \overline{(A \vee B)} \vee B \\ \Leftrightarrow & (A \vee B) \vee \overline{(A \vee B)} \\ \Leftrightarrow & T \end{aligned}$$

Ví dụ

1. Chứng minh mệnh đề sau hằng đúng: $[\bar{A} \wedge (A \vee B)] \rightarrow B$ (1)

Cách làm: (3) Chứng minh bằng phản chứng

Giả sử MĐ (1) không hằng đúng $\Rightarrow$ tồn tại A, B để MĐ (1) sai. Khi đó: $\bar{A} \wedge (A \vee B)$ Đúng và B Sai (*)

$$\bar{A} \wedge (A \vee B) \text{ Đúng} \Rightarrow \begin{cases} \bar{A} \text{ Đúng} \\ A \vee B \text{ Đúng} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \text{ Sai} \\ A \vee B \text{ Đúng} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \text{ Sai} \\ B \text{ Đúng} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Mâu thuẫn với (*)

$\Rightarrow$ Giả sử sai $\Rightarrow$ Mệnh đề là hằng đúng.



Ví dụ

2. Chứng minh hai mệnh đề sau là tương đương logic:

$$(p \rightarrow q) \wedge q \text{ và } p \wedge q$$

3. Xác định xem hai mệnh đề sau có tương đương logic không?

$$(p \rightarrow q) \rightarrow r \text{ và } p \vee (q \rightarrow r)$$

5. Logic vị từ

a. Vị từ (Hàm mệnh đề)

Một vị từ là một khẳng định $P(x, y, \dots)$ trong đó chứa một số biến $x, y, \dots$ lấy giá trị trong những tập hợp $A, B, \dots$ cho trước, sao cho:

- Bản thân $P(x, y, \dots)$ không phải là mệnh đề.
- Nếu thay $x, y, \dots$ bằng những giá trị cụ thể $(x_0, y_0, \dots)$ thuộc tập hợp $A, B, \dots$ cho trước ta sẽ được một mệnh đề $P(x_0, y_0, \dots)$.
 - Các biến $x, y, \dots$ được gọi là các biến tự do của vị từ.
- Ví dụ 1: $P(x) = "x > 3"$ với $x \in \mathbb{N}$
- Ví dụ 2: $P(x, y) = "x^2 - xy + y^2 > 3"$ với $x, y \in \mathbb{N}$

5. Logic vị từ

b. Lượng từ

Cho $P(x)$ là một vị từ với biến x xác định trên X

- Lượng từ “**với mọi**” của $P(x)$ là:

“ $P(x)$ đúng với mọi giá trị $x \in X$ ”

Kí hiệu: $\forall x \in X, P(x)$

- Lượng từ “**tồn tại**” của $P(x)$ là:

“tồn tại giá trị $x \in X$ sao cho $P(x)$ đúng”

Kí hiệu: $\exists x \in X, P(x)$

5. Logic vị từ

b. Lượng từ

Cho $P(x)$ là một vị từ với biến x xác định trên X

- Lượng từ “với mọi” của $P(x)$ là: “ $P(x)$ đúng với mọi giá trị $x \in X$ ” - Kí hiệu: $\forall x \in X, P(x)$
- Lượng từ “tồn tại” của $P(x)$ là: “tồn tại giá trị $x \in X$ sao cho $P(x)$ đúng” - Kí hiệu: $\exists x \in X, P(x)$

Ví dụ:

$P(x) = "x^2 > 4"$, với $x \in R$ là một hàm mệnh đề.

“ $\forall x \in R, x^2 > 4$ ” – là mệnh đề sai

“ $\exists x \in R, x^2 > 4$ ” – là mệnh đề đúng

5. Logic vị từ

b. Lượng từ

Định lý: Ta có các tương đương logic

$$(i) \quad \overline{\forall x \in X, P(x)} \Leftrightarrow \exists x \in X, \overline{P(x)}$$

$$(ii) \quad \overline{\exists x \in X, P(x)} \Leftrightarrow \forall x \in X, \overline{P(x)}$$

Ví dụ: viết mệnh đề phủ định của mệnh đề sau:

a) $A = "\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0"$

b) $B = "\exists x, \forall y, x^2 + y^2 \leq 0"$

c) $C = "\forall x, (\exists y, P(x, y)) \rightarrow Q(x)"$

5. Logic vị từ

- a) $A = "\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0"$
- b) $B = "\exists x, \forall y, x^2 + y^2 \leq 0"$
- c) $C = "\forall x, (\exists y, P(x, y)) \rightarrow Q(x)"$

Lời giải:

$$\text{a) } \overline{A} \Leftrightarrow \overline{\exists x \in \mathbb{R}, x^2 > 0} \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}, x^2 \leq 0$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \overline{B} &\Leftrightarrow \overline{\forall x, \forall y, x^2 + y^2 \leq 0} \Leftrightarrow \forall x, \overline{\exists y, x^2 + y^2 \leq 0} \\ &\Leftrightarrow \forall x, \exists y, x^2 + y^2 > 0 \end{aligned}$$

$$\text{c) } C = "\forall x, (\exists y, P(x, y)) \rightarrow Q(x)"$$

$$\begin{aligned} \overline{C} &\Leftrightarrow \overline{\forall x, (\exists y, P(x, y)) \rightarrow Q(x)} \Leftrightarrow \overline{\forall x, (\exists y, P(x, y)) \vee \overline{Q(x)}} \\ &\Leftrightarrow \exists x, (\exists y, P(x, y)) \wedge \overline{Q(x)} \end{aligned}$$



II. Tập hợp

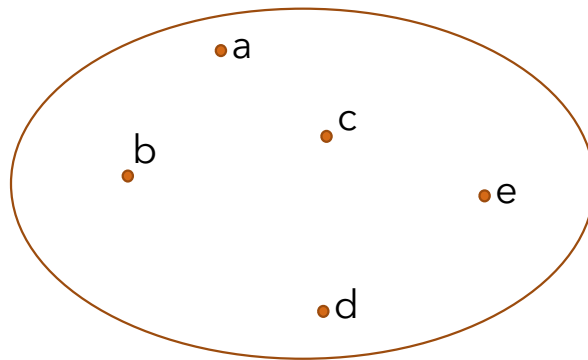
- Các khái niệm cơ bản
 - Phép toán
- 

Các khái niệm cơ bản

1. **Tập hợp** là một bộ không có thứ tự các đối tượng

Ví dụ: Tập hợp học sinh trong lớp, tập hợp chữ cái tiếng Việt

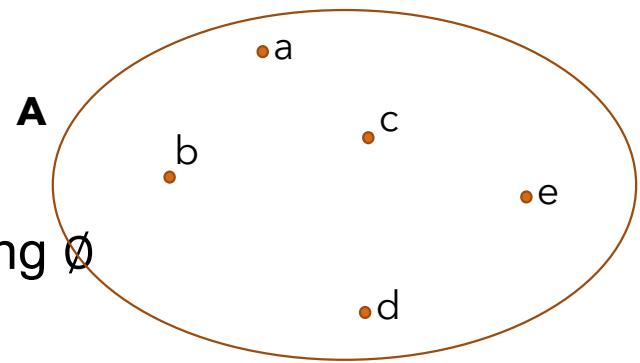
2. Các đối tượng trong một tập hợp gọi là phần tử



Các khái niệm cơ bản

3. Ký hiệu:

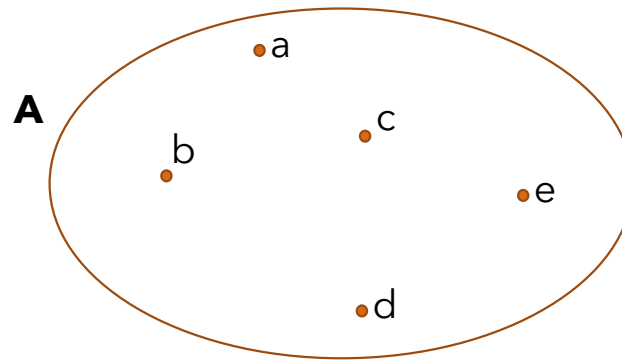
- Tập hợp: chữ cái in hoa A, B, C, ...
- Phần tử: chữ cái thường a, b, c, ...
- Tập hợp không chứa phần tử nào: tập rỗng $\emptyset$
- Phần tử thuộc tập hợp: $\in$



Các khái niệm cơ bản

4. Các cách biểu diễn:

- Liệt kê: $A = \{a, b, c, d, e\}$
- Chỉ ra tính chất tổng quát: $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$
- Sơ đồ Venn





Các khái niệm cơ bản

5. Hai tập hợp bằng nhau $A = B$ khi và chỉ khi chúng có cùng các phần tử

- $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$
- $\{a, a, b, c\} = \{b, b, c, a\}$

6. Tập con: tập hợp A được gọi là tập con của tập hợp B khi và chỉ khi mọi phần tử thuộc tập A thì cũng là phần tử của tập B .

- Ký hiệu: $A \subset B$
- $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$

7. Lực lượng của tập hợp là số phần tử phân biệt của tập hợp

- Ký hiệu: $N(A)$ hoặc $|A|$
- 

Các phép toán

Cho trước hai tập hợp: A và B

1. Phép hợp: $\cup$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

2. Phép giao: $\cap$

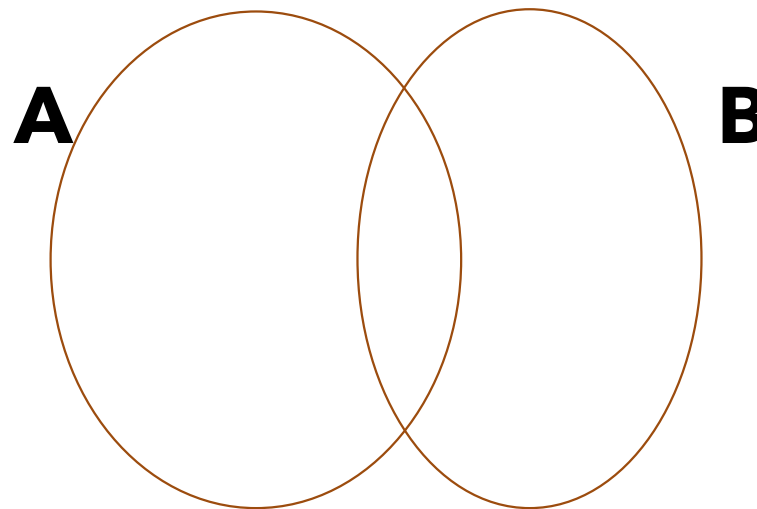
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

3. Phép trừ: $- (\setminus)$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

5. Phép bù: $\bar{}$

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$$





Các phép toán

Cho trước hai tập hợp: A và B

6. Tích Đề-các: x

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Ví dụ:

$$A = \{1, 2, 4\}$$

$$B = \{\text{xanh}, 2, \text{đỏ}\}$$

$$A \times B = \{(1, \text{xanh}); (1, 2); (1, \text{đỏ}); (2, \text{xanh}); (2, 2); (2, \text{đỏ}); (4, \text{xanh}); (4, 2); (4, \text{đỏ})\}$$


7. Tính chất

a. Luật giao hoán:

$$A \cup B = B \cup A ; A \cap B = B \cap A$$

b. Luật kết hợp:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C ; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

c. Luật phân phối:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

d. Luật đối ngẫu:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} ; \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

8. Một số tập hợp bằng nhau

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cap \Omega = A$$

$$A \cup \Omega = \Omega$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

$$A \cup \overline{A} = \Omega$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$



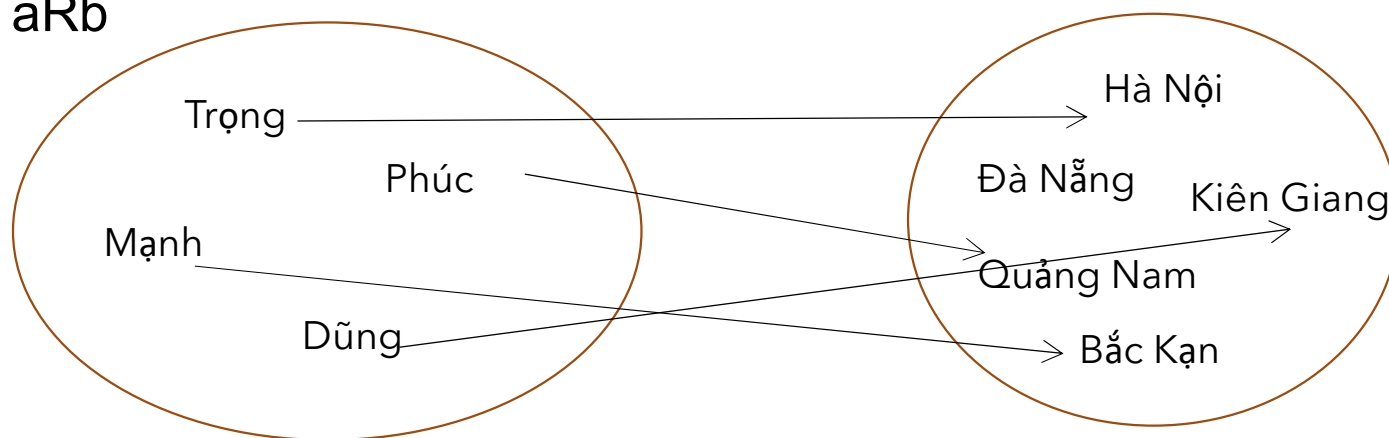
III. Quan hệ

- Quan hệ hai ngôi
 - Tính chất
 - Quan hệ tương đương
 - Phân hoạch
- 

1. Quan hệ hai ngôi

a. Định nghĩa 1: $R \subset A \times B$ là một quan hệ hai ngôi từ A đến B .

- Hai phần tử a, b thỏa mãn $(a, b) \in R$ được gọi là có quan hệ R với nhau
- Ký hiệu aRb
- Ví dụ:



b. Định nghĩa 2: $R \subset A \times A$ là một quan hệ hai ngôi trên tập A



2. Tính chất của quan hệ hai ngôi

Một quan hệ hai ngôi R trên tập A được gọi là có tính chất:

a. Phản xạ: nếu $(x, x) \in R \quad \forall x \in A$

b. Đối xứng: nếu $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$

c. Phản đối xứng: nếu $\begin{cases} (x, y) \in R \\ (y, x) \in R \end{cases} \Rightarrow x = y$

d. Truyền ứng: nếu $\begin{cases} (x, y) \in R \\ (y, z) \in R \end{cases} \Rightarrow (x, z) \in R$





2. Tính chất của quan hệ hai ngôi - Ví dụ

Xét xem quan hệ hai ngôi trên $\mathbb{N}$ dưới đây có những tính chất nào?

1. $R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$
2. $R_2 = \{(a, b) \mid a = b\}$
3. $R_3 = \{(a, b) \mid a < b\}$
4. $R_4 = \{(a, b) \mid a + b = 2\}$
5. $R_5 = \{(a, b) \mid \exists k \in \mathbb{Z} ; a = k \cdot b\}$

Tự nghĩ ra một quan hệ hai ngôi và xác định tính chất nếu có





3. Quan hệ tương đương

a. Định nghĩa: Quan hệ tương đương là một quan hệ hai ngôi có cả ba tính chất: phản xạ, đối xứng và truyền ứng

- Ví dụ:
 - aRb nếu $a = b$
 - Quan hệ đồng hướng
 - aRb nếu $a - b \in \mathbb{Z}$
 - ...



3. Quan hệ tương đương

b. Lớp tương đương

Cho R là một quan hệ tương đương trên A ; phần tử $a \in A$.

- Định nghĩa: Lớp tương đương chứa a là tập chứa tất cả các phần tử có quan hệ R với a

- Ký hiệu $[a]_R$ hoặc $[a]$

$$[a]_R = [a] = \{b \in A \mid aRb\}$$

- Ví dụ:

$$aRb \text{ nếu } (a - b) : 2 \Rightarrow [1]_R = ? \quad [10]_R = ?$$



3. Quan hệ tương đương

b. Lớp tương đương

- Các lớp tương đương có tính chất: phủ kín tập hợp đã cho (một phần tử bất kỳ phải thuộc vào một lớp nào đó) và rời nhau (không có phần tử nào thuộc hai lớp)
- Định lý: Cho R là quan hệ tương đương trên A ; $a, b \in A$

Các mệnh đề sau là tương đương:

- aRb
 - $[a] = [b]$
 - $[a] \cap [b] \neq \emptyset$
- 



4. Phân hoạch

- Một phân hoạch của một tập A là một tập các tập con khác rỗng, không giao nhau của A và hợp của chúng là tập A

$\{A_i\}$ là phân hoạch của A nếu:

- $A_i \neq \emptyset \forall i$
 - $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$
 - $\bigcup_i A_i = A$
- Ví dụ: $A = \{1, 2, 3\}$ có bao nhiêu phân hoạch?
- 



4. Phân hoạch

- Định lý:

Nếu R là một quan hệ tương đương trên A thì các lớp tương đương của R là một phân hoạch của A

Ngược lại, cho trước một phân hoạch của A , tồn tại một quan hệ tương đương nhận các tập trong phân hoạch trên là một lớp tương đương của quan hệ đó.





IV. Ánh xạ

- Định nghĩa
 - Ảnh và nghịch ảnh
 - Đơn ánh, song ánh, toàn ánh
 - Tích ánh xạ
 - Ánh xạ ngược
- 



1. Định nghĩa

- Cho $X, Y \neq \emptyset$. Ánh xạ f từ X vào Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một và chỉ một phần tử $y \in Y$
- Ký hiệu:

$$f: X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

- X : Tập nguồn, Y : Tập đích
 - $y = f(x)$ được gọi là ảnh của x qua ánh xạ f
 - Ví dụ: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 2 + x$
- 



2. Ảnh và nghịch ảnh

Cho ánh xạ: $f: X \rightarrow Y; x \mapsto y = f(x); A \subset X; B \subset Y$

- Ảnh của tập A : $f(A)$

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\} = \{y \in Y | \exists x \in X; f(x) = y\}$$

Ví dụ: $f(x) = x^2 + 3; f([-3, 4]) = ?$

- Nghịch ảnh của tập B : $f^{-1}(B)$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

Ví dụ: $f(x) = x^2 + 3; f^{-1}([-3, 4]) = ?$





3. Đơn ánh, song ánh, toàn ánh

Cho ánh xạ $f: X \rightarrow Y$

- Đơn ánh: $\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
 - $\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
 - $\Leftrightarrow f(x) = y$ luôn có không quá một nghiệm
- Toàn ánh: $f(X) = Y \Leftrightarrow f(x) = y$ luôn có nghiệm
- Song ánh = đơn ánh + toàn ánh



• Ví dụ: $f(x) = \frac{2x^2 + 5x - 2}{x^2 + 1} \quad (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$



4. Tích ánh xạ

Cho hai ánh xạ: $f: X \rightarrow Y$; $g: Y \rightarrow Z$

- Ánh xạ $h: X \rightarrow Z$ xác định bởi: $h(x) = g(f(x))$ với $x \in X$ gọi là ánh xạ tích của f và g .

Kí hiệu: $g \circ f$

- Ví dụ: Cho hai ánh xạ $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; xác định $f \circ g$ và $g \circ f$ với

$$f(x) = 2x + 3$$

$$g(x) = x^2 + 4$$


5. Ánh xạ ngược

- Cho song ánh $f: X \rightarrow Y$. Khi đó, với mỗi $y \in Y$, tồn tại duy nhất một giá trị $x \in X$ sao cho $f(x) = y$ hay $f^{-1}(y) = x$

Như vậy, ta có ánh xạ:

$$f^{-1}: Y \rightarrow X$$

$$y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

Ánh xạ này gọi là ánh xạ ngược của ánh xạ f .

- Ví dụ: $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = 2x + 3$; $g(x) = x^2 + 4$

Tìm ánh xạ ngược của f, g (nếu có)