

Đồ thị phẳng – Bài toán tô màu

Nội dung

- Đồ thị phẳng
 - Giới thiệu
 - Định nghĩa
 - Công thức Euler
 - Định lý Kuratowski
- Bài toán tô màu
 - Tô màu đồ thị
 - Một số định lý
 - Thuật toán Welsh-Powell
 - Ứng dụng

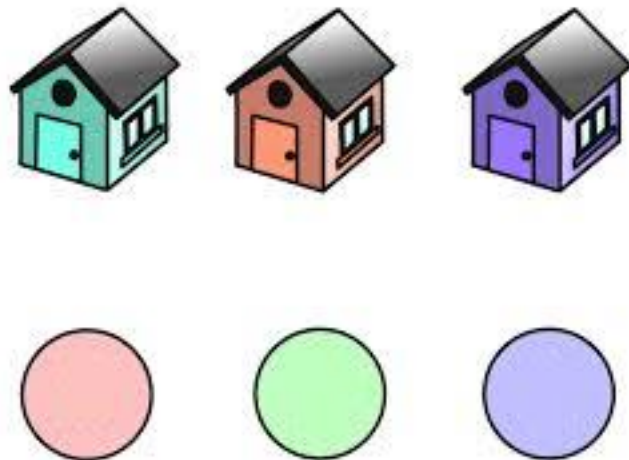
Đồ thị phẳng

Bài toán: ba nhà ba giếng

Có ba nhà ở gần ba cái giếng, mỗi nhà cần có đường đi thẳng từ nhà đến từng giếng. Do bất hòa nên họ muốn xây các đường đi sao cho không có đường nào giao nhau.

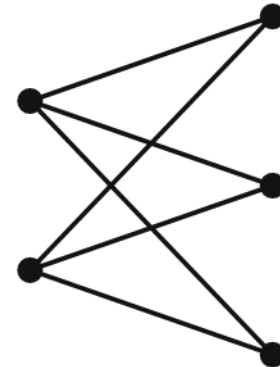
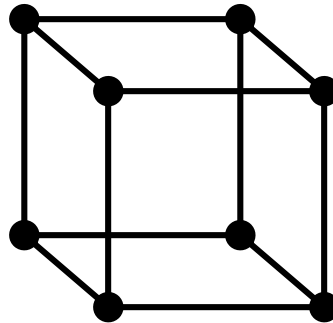
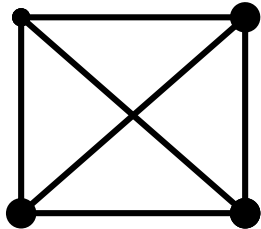
Có thực hiện được không?

Lưu ý: không làm đường giữa các nhà hay giữa các giếng.



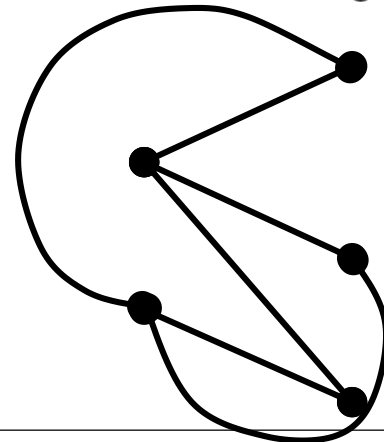
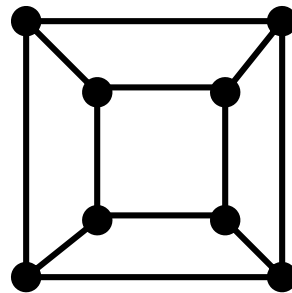
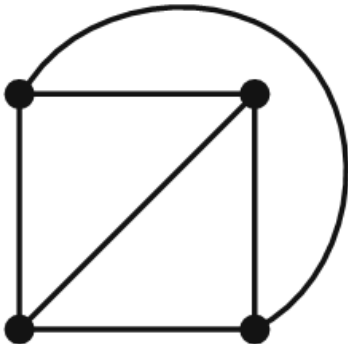
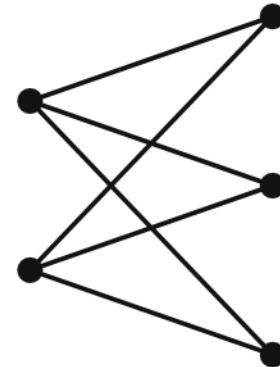
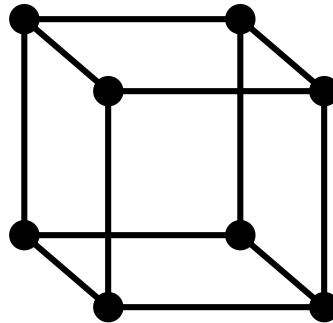
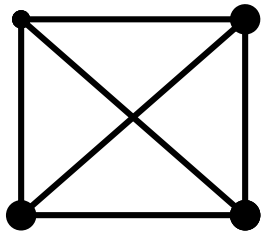
Đồ thị phẳng

- Định nghĩa: Đồ thị vô hướng G là đồ thị phẳng nếu nó có thể được vẽ trên một mặt phẳng sao cho không có cạnh nào cắt nhau tại các điểm không phải đầu mút.
- Ví dụ:



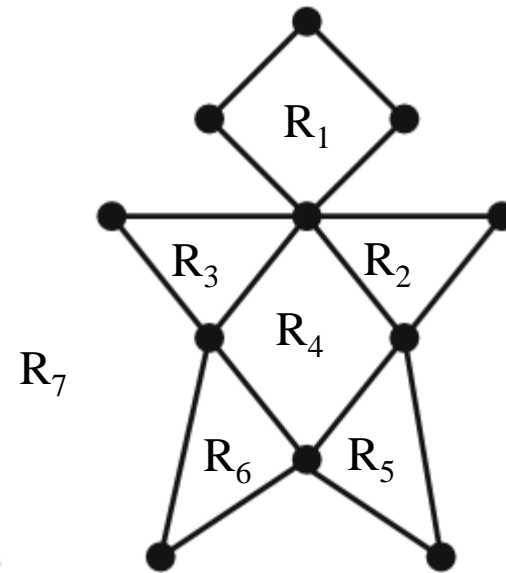
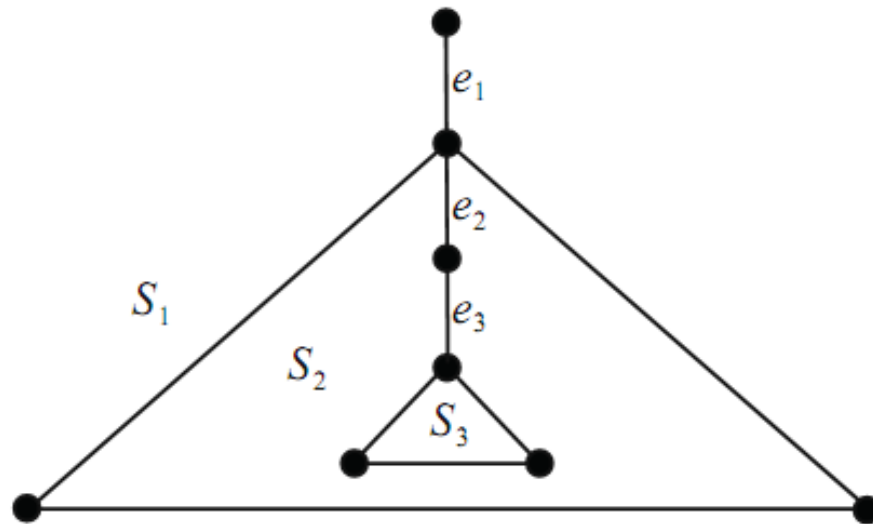
Đồ thị phẳng

- Định nghĩa: Đồ thị vô hướng G là đồ thị phẳng nếu nó có thể được vẽ trên một mặt phẳng sao cho không có cạnh nào cắt nhau tại các điểm không phải đầu mút.
- Ví dụ:



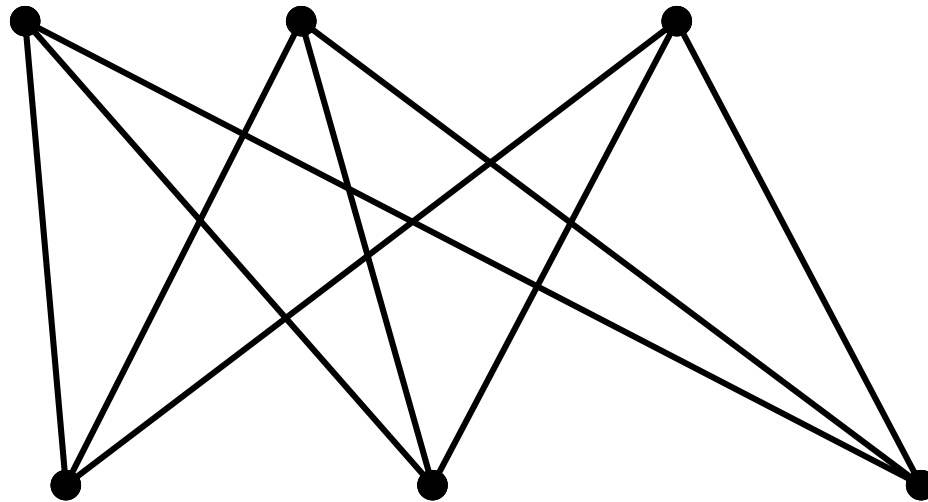
Miền

- Định nghĩa: miền là một phần mặt phẳng, trong đó 2 điểm bất kỳ có thể nối với nhau mà không cắt bất cứ cạnh nào của đồ thị
- Miền lớn nhất ở ngoài cùng là miền ngoài
- Ví dụ:



Đồ thị phẳng

- Đồ thị 2 phía $K_{3,3}$ có là đồ thị phẳng không?



Công thức Euler

- Định lý 1: Cho G là một đơn đồ thị phẳng, liên thông có m cạnh, n đỉnh. Gọi r là số miền trong biểu diễn phẳng của G . Khi đó:

$$\mathbf{r = m - n + 2} \quad \text{hay} \quad \mathbf{n - m + r = 2.}$$

- Chứng minh:

Công thức Euler

- Định lý 1: Cho G là một đơn đồ thị phẳng, liên thông có m cạnh, n đỉnh. Gọi r là số miền trong biểu diễn phẳng của G . Khi đó:

$$\mathbf{r = m - n + 2} \quad \text{hay} \quad \mathbf{n - m + r = 2.}$$

- Chứng minh:

Bớt dần các cạnh của G đến khi thu được cây khung

Công thức Euler

- Hệ quả 1: Cho G là đơn đồ thị phẳng liên thông có m cạnh, n đỉnh ($n \geq 3$).

Khi đó:
$$\mathbf{m \leq 3n - 6}$$

- Chứng minh:
 - Mỗi miền được bao bởi ít nhất 3 cạnh
 - Mỗi cạnh nằm trên nhiều nhất 2 miền
 - Áp dụng công thức Euler

Công thức Euler

- Hệ quả 2: Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có m cạnh, n đỉnh ($n \geq 3$) và không có chu trình độ dài 3. Khi đó: $m \leq 2n - 4$
- Hệ quả 3: Cho G là một đơn đồ thị phẳng liên thông có m cạnh, n đỉnh thì G phải có ít nhất một đỉnh có bậc nhỏ hơn hoặc bằng 5.
- Ví dụ:
Chứng minh: đồ thị K_5 và $K_{3,3}$ là đồ thị không phẳng

Công thức Euler

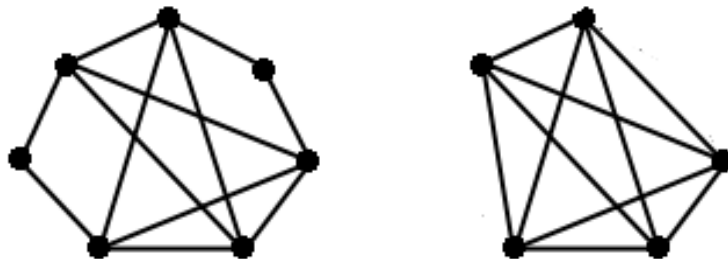
- Định lý 2: Cho G là một đơn đồ thị phẳng m cạnh, n đỉnh, k thành phần liên thông. Gọi r là số miền trong biểu diễn phẳng của G .

Khi đó: $\mathbf{n - m + r = k + 1.}$

Định lý Kuratowski

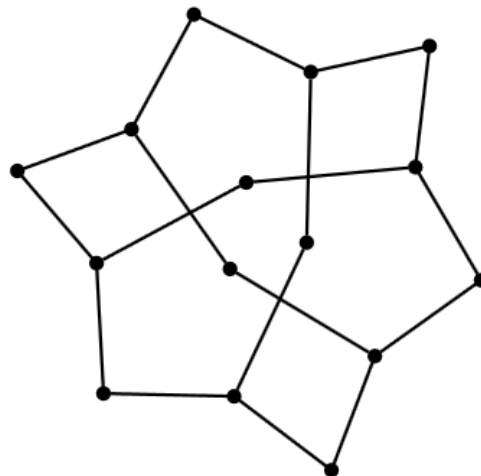
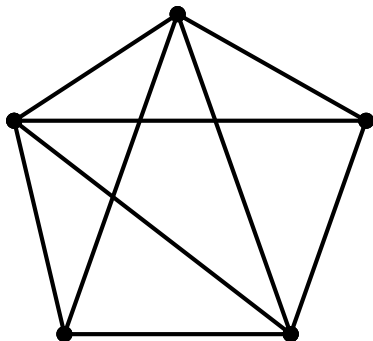
- **Đồ thị đồng phôi:** G và G' là đồng phôi nếu ta có thể thu được G' từ G bằng cách bỏ bớt hoặc thêm vào G các đỉnh có bậc bằng 2.

- Ví dụ:



- Định lý: Đồ thị G là không phẳng khi và chỉ khi G chứa một đồ thị con đồng phôi với $K_{3,3}$ hoặc K_5 .

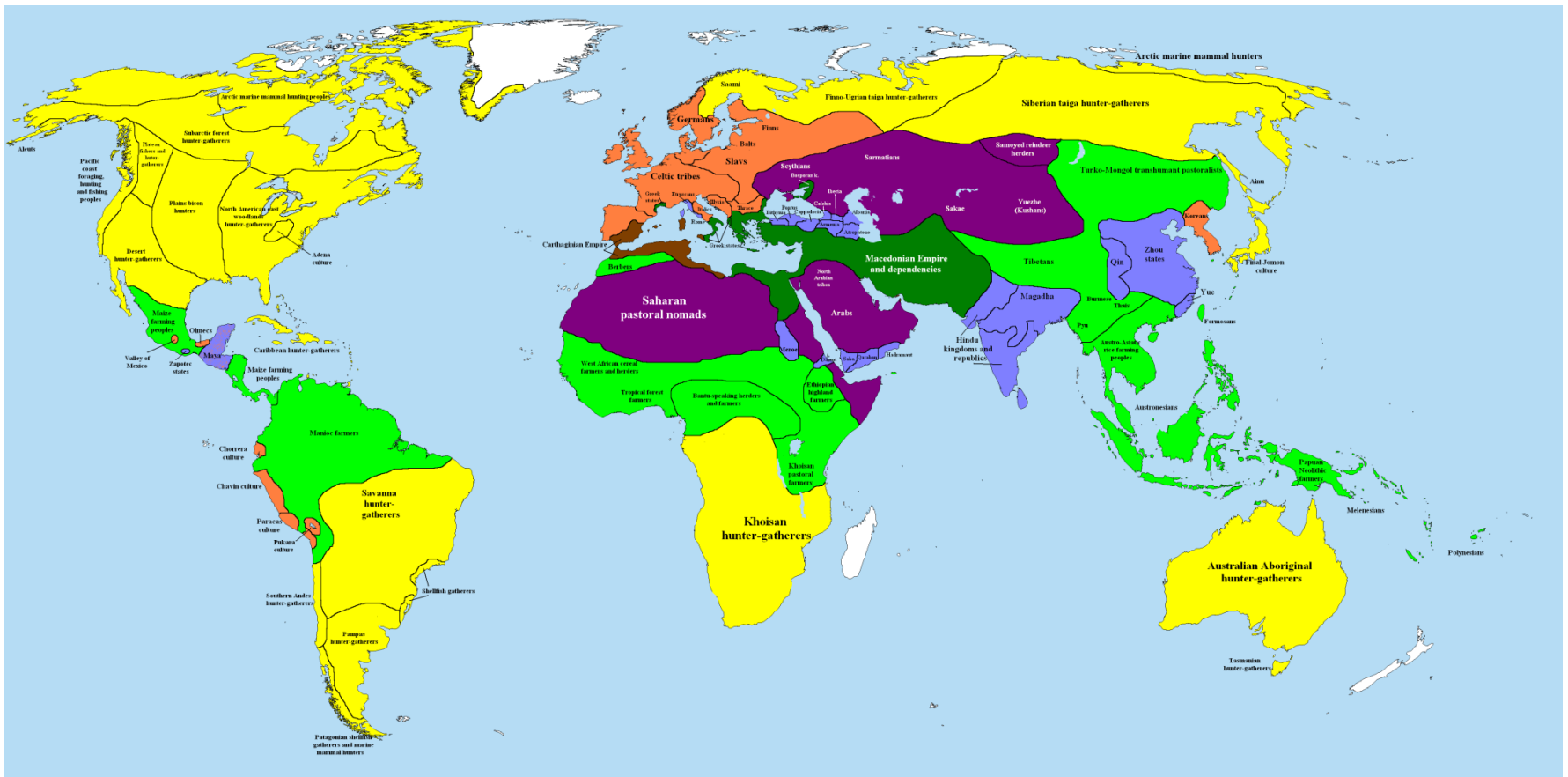
- Ví dụ:



Bài toán tô màu đồ thị

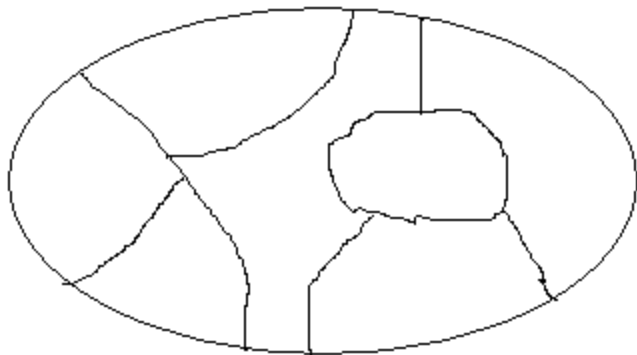
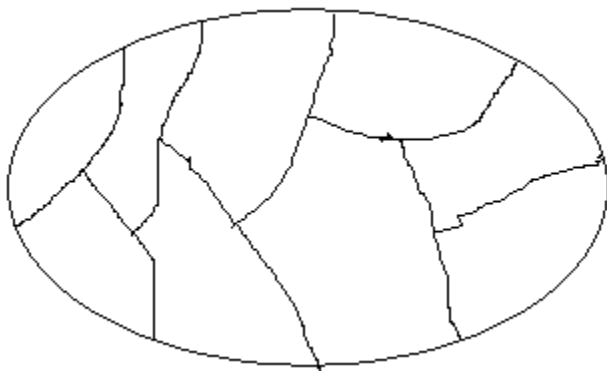
Bài toán: tô màu bản đồ

Xác định số màu tối thiểu cần dùng để tô màu một bản đồ sao cho hai miền kề nhau có màu khác nhau



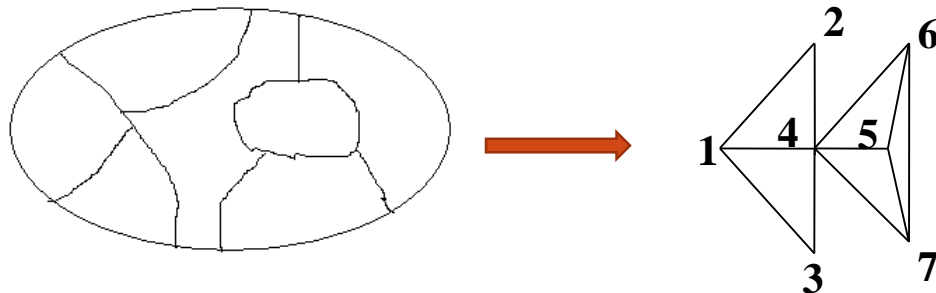
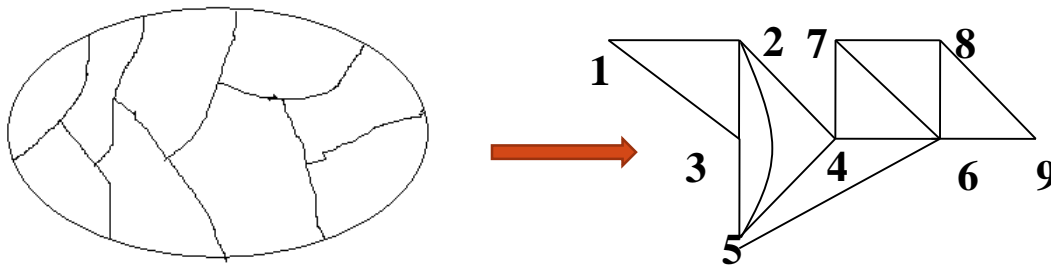
Bài toán tô màu bản đồ

- Xác định số màu tối thiểu cần dùng để tô màu một bản đồ sao cho hai miền kề nhau có màu khác nhau



Bài toán tô màu bản đồ

- Chuyển bản đồ về dạng đồ thị:
 - Mỗi miền của bản đồ thể hiện bằng một đỉnh
 - Nếu hai miền có biên giới chung thì 2 đỉnh tương ứng là kề nhau (chỉ chung đỉnh không được tính)
- Đồ thị thu được là **đồ thị đối ngẫu** với bản đồ đã đang xét



Bài toán tô màu đồ thị

- Định nghĩa: **Tô màu đồ thị** là việc gán màu cho các đỉnh của đồ thị sao cho hai đỉnh liền kề có màu khác nhau.

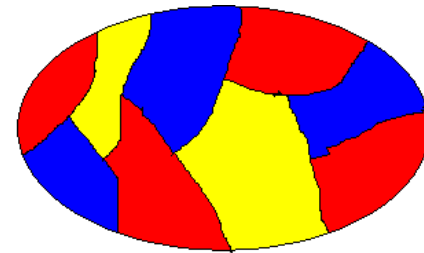
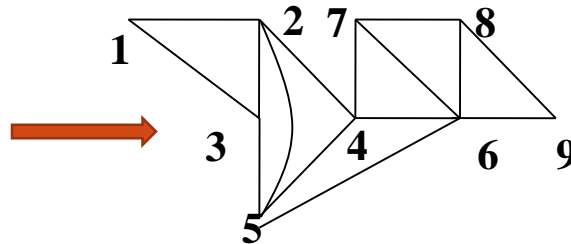
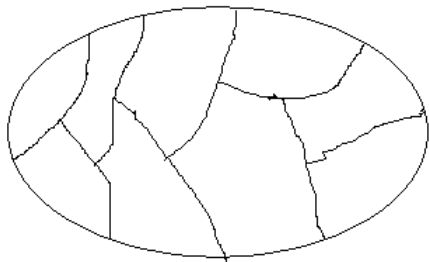
$$K: V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\} \mid k(u) \neq k(v) \forall uv \in E(G)$$

Khi đó đồ thị gọi là tô được bởi k màu

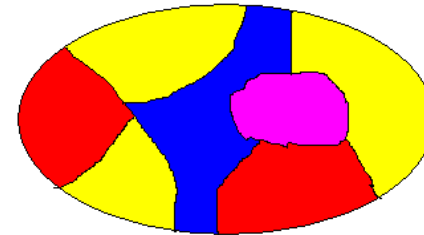
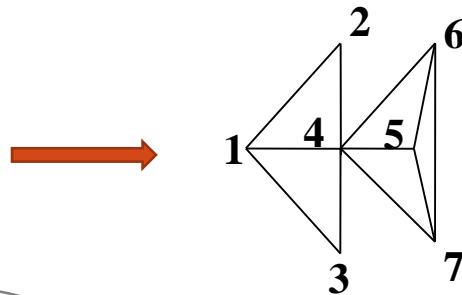
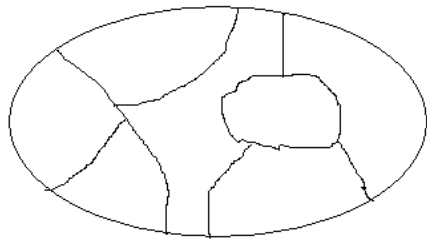
- Định nghĩa: **sắc số** của đồ thị là số màu nhỏ nhất cần dùng để tô màu đồ thị
- Ký hiệu: $\chi(G)$

Bài toán tô màu đồ thị

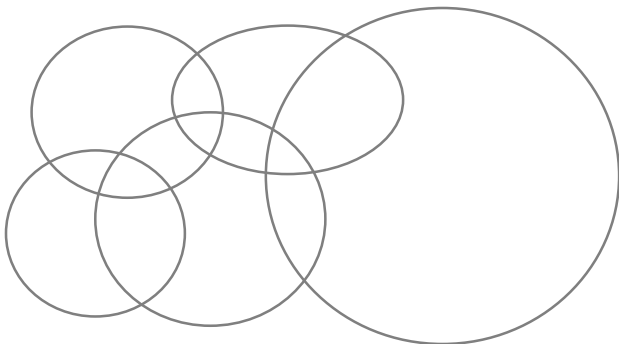
- Ví dụ



Sắc số = 3



Sắc số = 4



Sắc số = ?

Một số định lý về tô màu đồ thị

- Định lý 1: Mọi chu trình lẻ có sắc số bằng 3
- Định lý 2: Nếu G có chứa một đồ thị con đẳng cấu với K_n thì $\chi(G) \geq n$.
- Định lý 3: Một đơn đồ thị $G = (V, E)$ có thể tô bằng 2 màu khi và chỉ khi nó không có chu trình độ dài lẻ.
- Định lý 4: Một đồ thị có n đỉnh thì $\chi(G) \leq n$
- Định lý 5: Với mọi đồ thị G : $\chi(G) \leq 1 + \max_{v \in V} (\deg(v))$
- Định lý 6: Nếu G là đồ thị liên thông, không có chu trình lẻ, không là đồ thị đầy đủ thì $\chi(G) \leq \max_{v \in V} (\deg(v))$

Định lý 4 màu

- Định lý 4 màu: Mọi đồ thị phẳng đều có thể tô được bởi không quá 4 màu.
- Một số thông tin liên quan:
 - Bài toán được đưa ra năm 1852
 - Có rất nhiều chứng minh sai về bài toán này
 - Chứng minh sai nổi tiếng là của Alfred Kempe vào năm 1879
 - Percy Heawood phát hiện ra chứng minh sai vào năm 1890
 - Dựa vào đó, năm 1976 Appel và Haken đã chứng minh được bằng cách sử dụng máy tính

Thuật toán Welsh-Powell

Thuật toán W-P dùng để tô màu một đồ thị G

Bước 1: Sắp xếp các đỉnh G theo bậc giảm dần.

Bước 2: Dùng một màu chưa tô để tô đỉnh đầu tiên trong danh sách và tất cả các đỉnh không kề nhau, không kề với đỉnh đầu tiên.

Bước 3: Loại bỏ các đỉnh đã tô màu

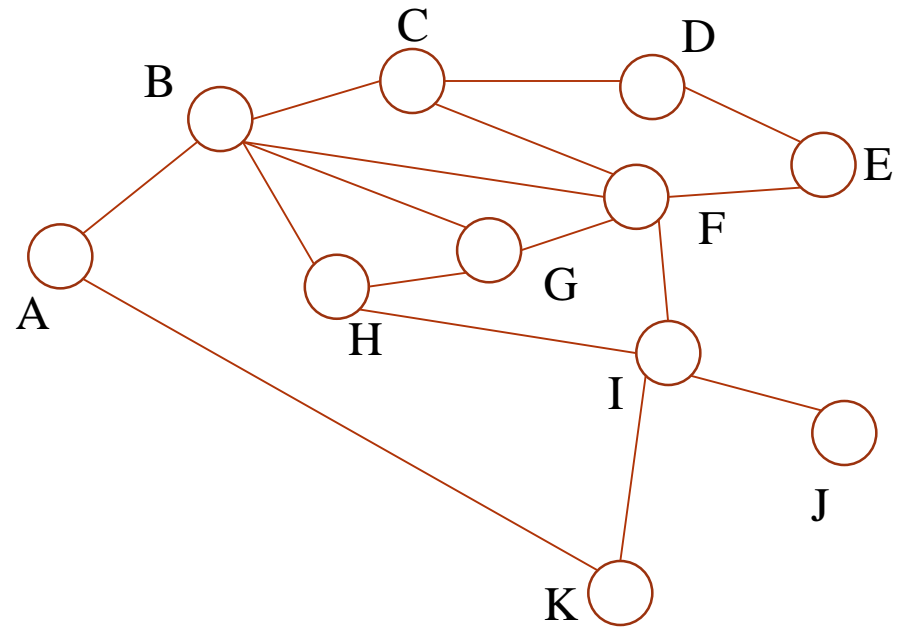
Bước 4:

- Nếu đã tô màu xong: kết thúc
- Nếu chưa xong: quay lại bước 2

Lưu ý: Thuật toán Welsh-Powell chưa cho ta sắc số của G . Kết quả chỉ thu được một cách tô màu tốt hơn cách tô màu ngẫu nhiên.

Ví dụ - thuật toán Welsh-Powell

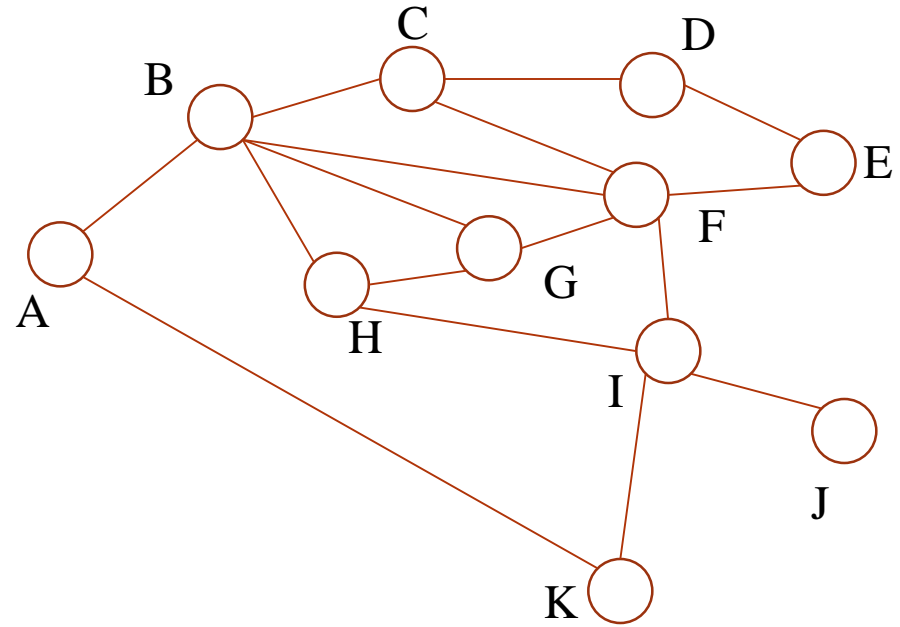
- Tô màu đồ thị:



Ví dụ - thuật toán Welsh-Powell

- Bước 1:

Đỉnh	Bậc
A	2
B	5
C	3
D	2
E	2
F	5
G	3
H	3
I	4
J	1
K	2



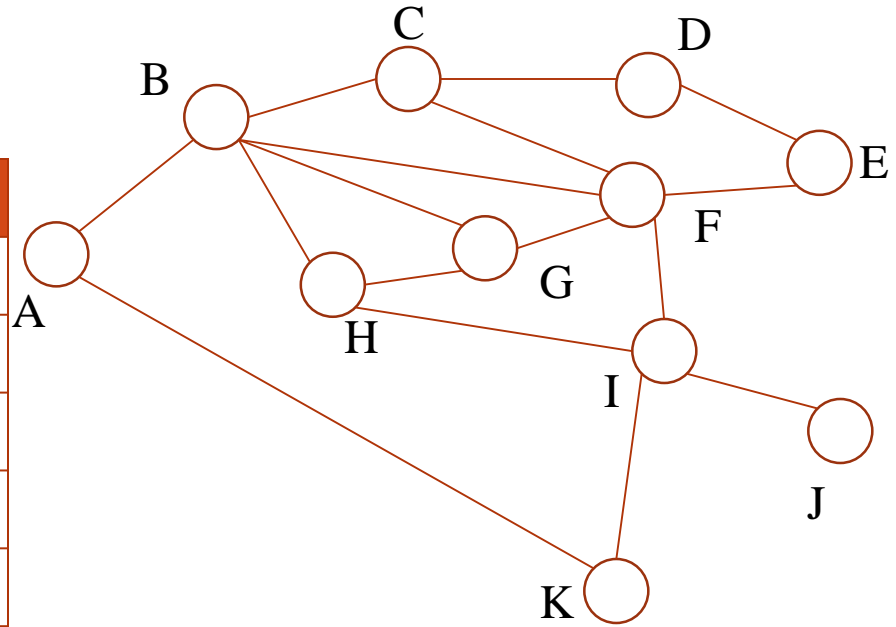
Ví dụ - thuật toán Welsh-Powell

- Bước 1:

Đỉnh	Bậc
A	2
B	5
C	3
D	2
E	2
F	5
G	3
H	3
I	4
J	1
K	2

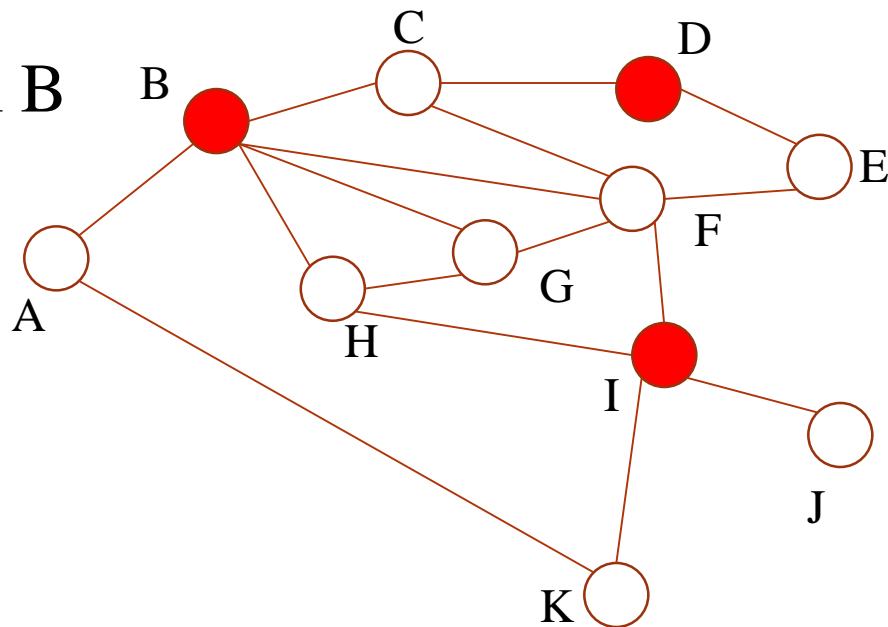


Đỉnh	Bậc
B	5
F	5
I	4
C	3
G	3
H	3
A	2
D	2
E	2
K	2
J	1



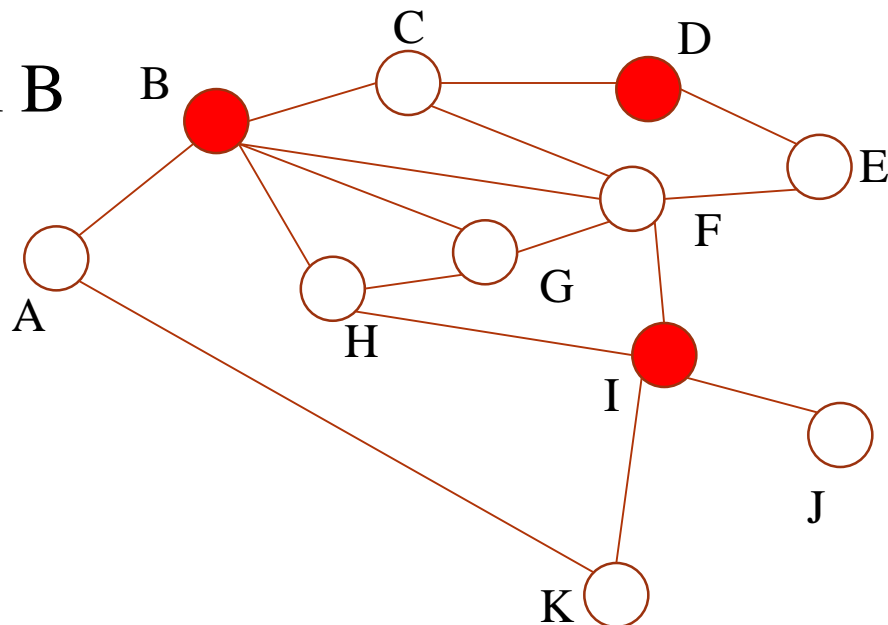
Ví dụ - thuật toán Welsh-Powell

- Bước 2: dùng màu đỏ tô đỉnh B
Và các đỉnh k kề B: D, I



Ví dụ - thuật toán Welsh-Powell

- Bước 2: dùng màu đỏ tô đỉnh B
Và các đỉnh kề B: D, I
- Bước 3: bỏ các đỉnh B, D, I



Đỉnh	Bậc
F	5
C	3
G	3
H	3
A	2
E	2
K	2
J	1

Ví dụ - thuật toán Welsh-Powell

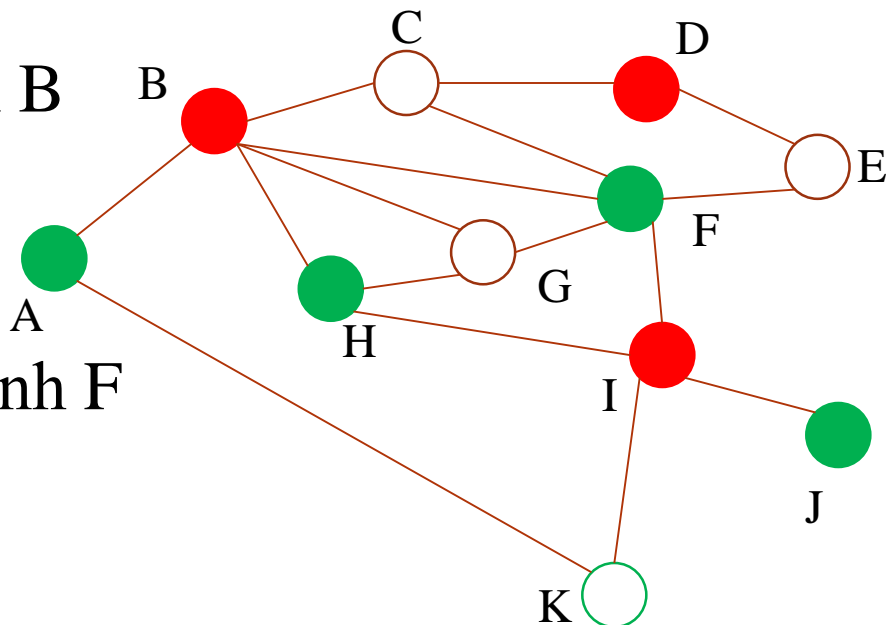
- Bước 2: dùng màu đỏ tô đỉnh B

Và các đỉnh k kề B: D, I

- Bước 3: bỏ các đỉnh B, D, I

- Bước 4: dùng màu xanh tô đỉnh F

Và các đỉnh H, A, J



Ví dụ - thuật toán Welsh-Powell

- Bước 2: dùng màu đỏ tô đỉnh B

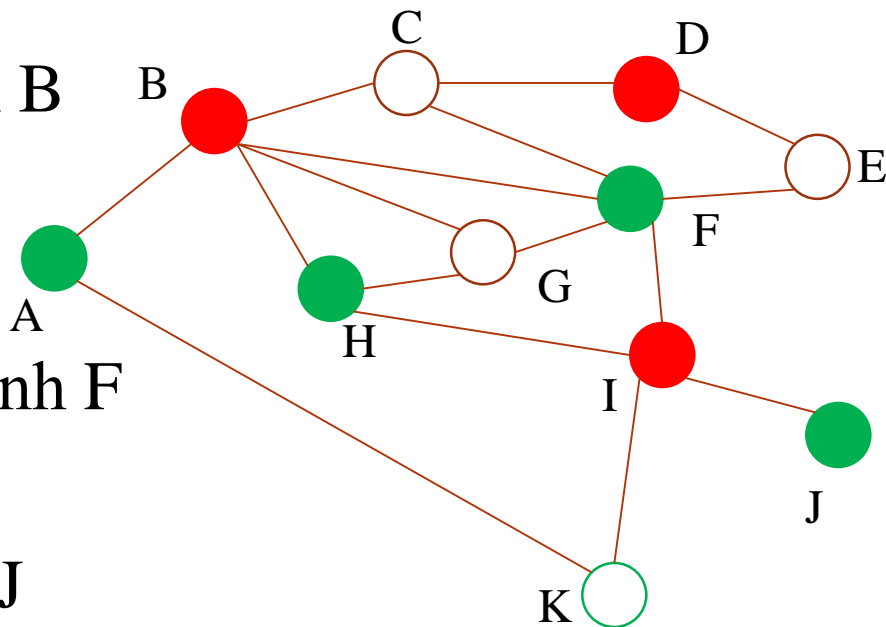
Và các đỉnh k kề B: D, I

- Bước 3: bỏ các đỉnh B, D, I

- Bước 4: dùng màu xanh tô đỉnh F

Và các đỉnh H, A, K, J

- Bước 5: bỏ các đỉnh F, H, A, J



Đỉnh	Bậc
C	3
G	3
E	2
K	2

Ví dụ - thuật toán Welsh-Powell

- Bước 2: dùng màu đỏ tô đỉnh B

Và các đỉnh kề B: D, I

- Bước 3: bỏ các đỉnh B, D, I

- Bước 4: dùng màu xanh tô đỉnh F

Và các đỉnh H, A, K, J

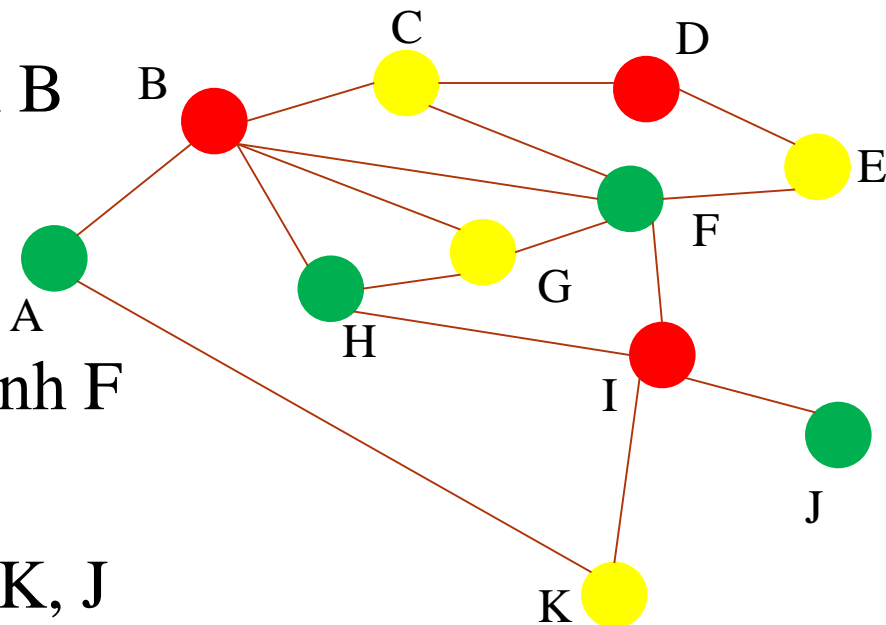
- Bước 5: bỏ các đỉnh F, H, A, K, J

- Bước 6: dùng màu vàng tô đỉnh C

Và các đỉnh E, G, K

- Bước 7: tô màu xong => kết thúc

Kết quả: dùng 3 màu **R**(B, D, I); **G**(F, H, A, J); **Y**(C, G, E, K)



Ứng dụng

- **Lập lịch thi:**

Mỗi sinh viên phải thi một số môn học. Hãy lập lịch thi sao cho không có sinh viên nào phải thi hai môn cùng một lúc

- **Giải pháp:**

- Mỗi môn học tương ứng với một đỉnh
- Nếu 2 môn học cùng được dự thi bởi 1 sinh viên thì 2 đỉnh tương ứng là kề nhau
- Số kíp thi trường phải tổ chức chính là sắc số của đồ thị đối ngẫu thu được

Ứng dụng

- Phân chia tần số của các kênh truyền thông
- Sử dụng thanh ghi
- Bố trí các con vật trong sở thú
- Đối sánh mẫu
-