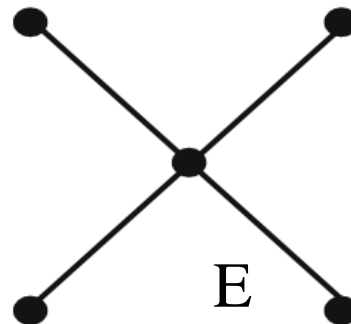
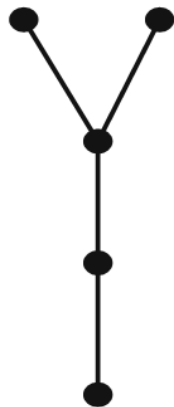
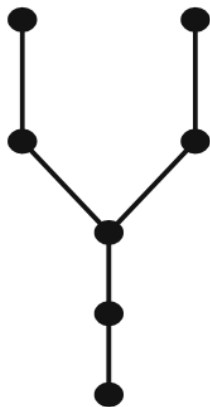
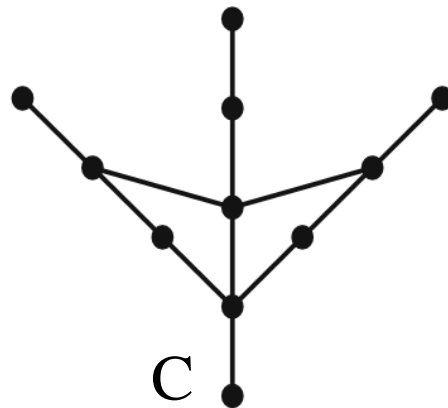
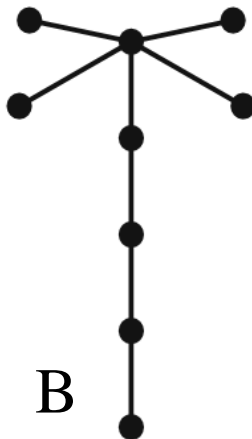
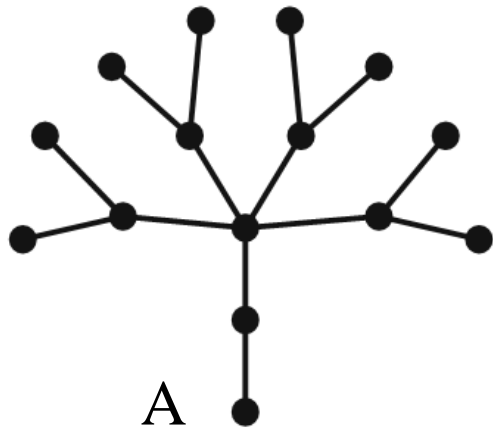


Cây

Nội dung

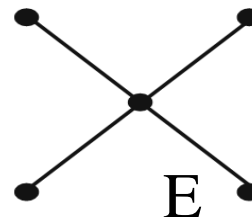
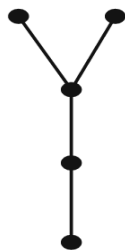
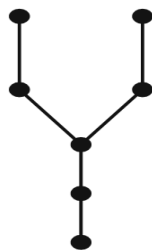
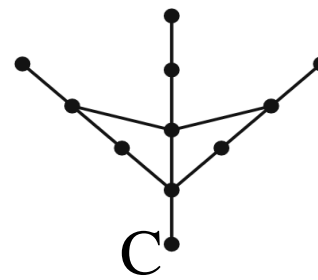
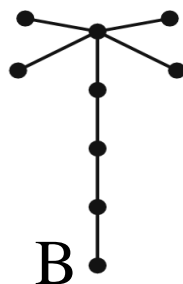
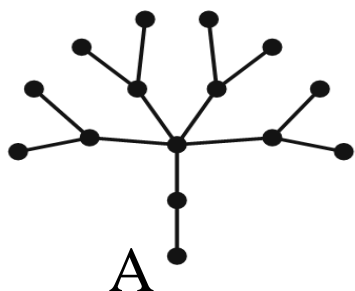
- Cây
- Cây khung
- Thuật toán tìm cây khung nhỏ nhất
 - Kruskal
 - Prim

Cây



Định nghĩa

- Cây là đồ thị vô hướng, liên thông, không có chu trình
- Đỉnh có bậc bằng 1 được gọi là lá
- Đồ thị không có chu trình được gọi là rừng



Tính chất của cây

- a. Một cây có n đỉnh thì có $n-1$ cạnh
- b. Nếu T là một rừng, có n đỉnh, k thành phần liên thông thì T có $n-k$ cạnh
- c. Một cây có > 1 đỉnh thì có ít nhất 2 lá
- d. T là một cây có k cạnh. Nếu G là đồ thị có bậc của tất cả các đỉnh đều $\geq k$ thì T là đồ thị con của G .
Hay: G chứa tất cả các cây có tối đa $k+1$ đỉnh

Tính chất của cây

Chứng minh: quy nạp

Ví dụ: Một cây T có n đỉnh thì có $n-1$ cạnh

$K = 1$: cây có 0 cạnh - đúng

$K = 2$: cây có 1 cạnh – đúng

$K = 3$: cây có 2 cạnh - đúng

Giả sử đúng với mọi $k < n$; ta sẽ cm đúng với $k = n$:

Ta thấy:

Trong $T \exists$ đỉnh có bậc bằng 1 – kí hiệu: v

Đỉnh duy nhất kề với v : u

$T - \{v\}$: không có chu trình, liên thông \Rightarrow là cây $n-1$ đỉnh

$T - \{v\}$ có $n-2$ cạnh $\Rightarrow T$ có $(n-2) + 1 = n-1$ cạnh

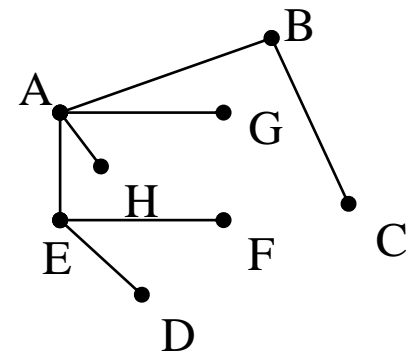
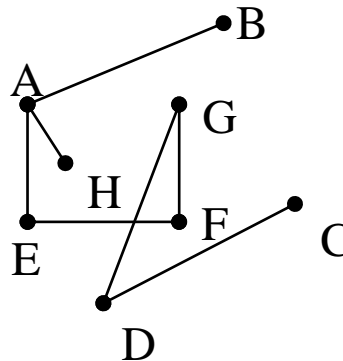
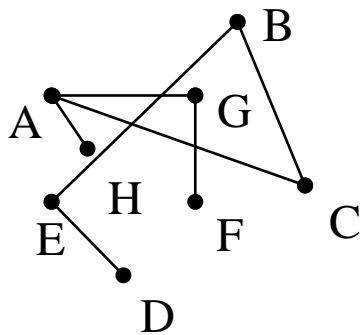
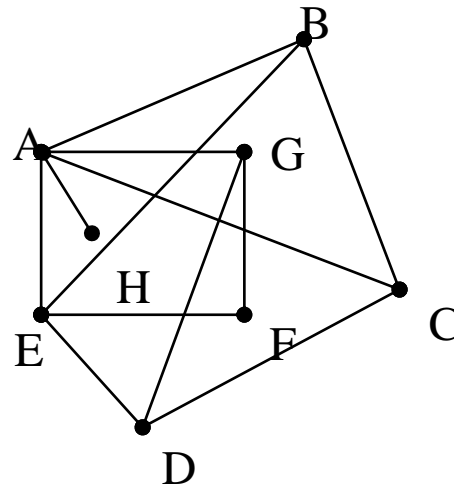
Tính chất của cây

Đồ thị G có n đỉnh là một cây khi và chỉ khi thỏa mãn một trong các điều kiện:

- a. Không có chu trình và có $n-1$ cạnh
- b. Liên thông và có $n-1$ cạnh
- c. Giữa 2 đỉnh bất kỳ có đúng một đường đi đơn
- d. G không có chu trình nhưng nếu thêm bất kỳ 1 cạnh mới nào sẽ tạo thành chu trình
- e. Liên thông, tất cả các cạnh đều là cầu
- f. Liên thông, tất cả các đỉnh không phải lá của cây đều là đỉnh rẽ nhánh

Cây khung của đồ thị

Định nghĩa: Cho trước đồ thị $G = \langle V, E \rangle$; cây T là cây khung của G nếu T là đồ thị con của G và chứa tất cả các đỉnh của G .



Bài toán cây khung nhỏ nhất

Cho $G = \langle V, E \rangle$ là đồ thị vô hướng, liên thông,

Mỗi cạnh của đồ thị được gán với một số thực không âm gọi là trọng số.

Bài toán:

Tìm cây khung của G có tổng trọng số trên các cạnh thuộc cây là nhỏ nhất - **Cây khung nhỏ nhất**

Ứng dụng:

- Thiết kế hệ thống mạng (điện thoại, truyền hình cáp, đường sắt...)
- Giải bài toán Người bán hàng

Thuật toán Kruskal

Cho đồ thị n đỉnh, liên thông, có trọng số $G = \langle V, E \rangle$

Thuật toán Kruskal tìm cây khung nhỏ nhất:

B1: $T = \{\emptyset\}$

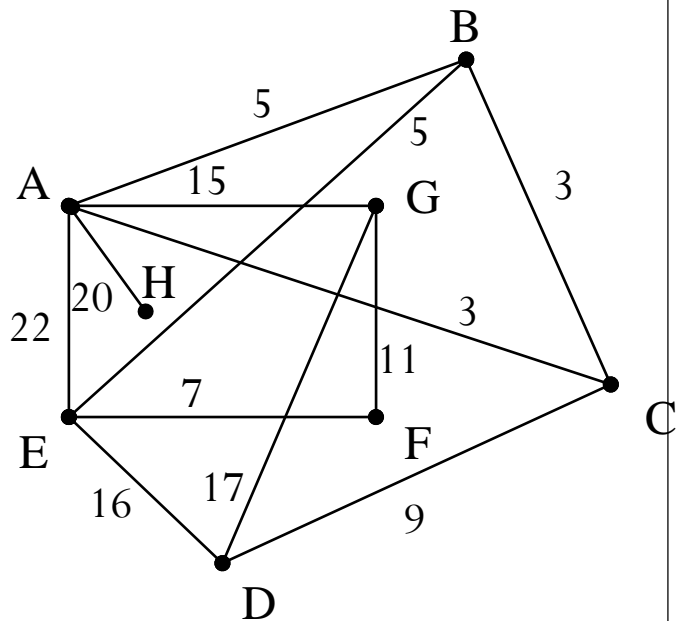
B2: Tìm cạnh có **trọng số nhỏ nhất** trong các cạnh còn lại, **không tạo thành chu trình** với các cạnh có trong T (kí hiệu: e)

B3: Thêm e vào T , xóa e khỏi G

B4: Nếu T là cây khung của $G \Rightarrow$ kết thúc, nếu không: quay lại bước 2

Ví dụ

$AB = 5$; $AC = 3$; $AE = 22$; $AG = 3$;
 $AH = 20$; $BC = 3$; $BE = 5$; $CD = 9$;
 $DE = 16$; $DG = 17$; $EF = 7$; $FG = 11$;

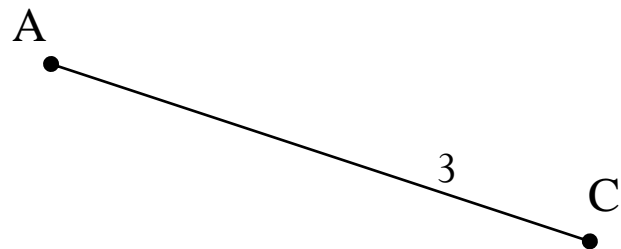
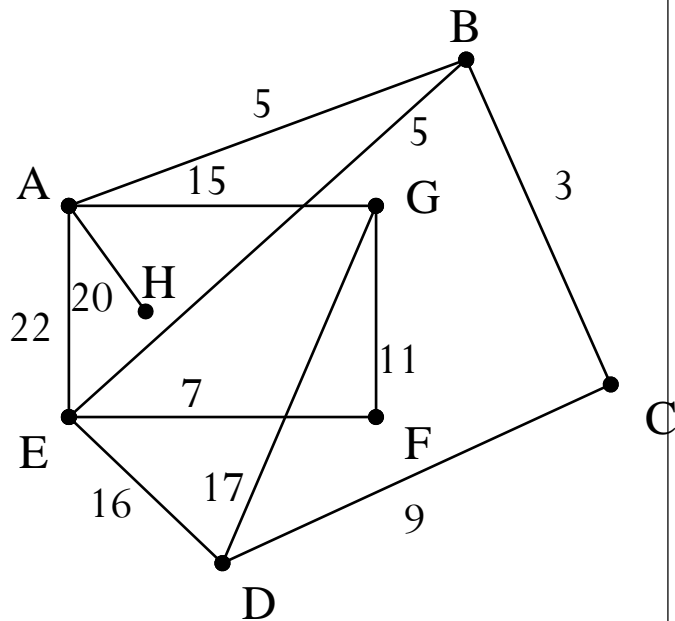


Ví dụ

$AB = 5; AC = 3; AE = 22; AG = 3;$
 $AH = 20; BC = 3; BE = 5; CD = 9;$
 $DE = 16; DG = 17; EF = 7; FG = 11;$

$T = \emptyset;$

$\min E = AC \Rightarrow T = \{AC\}$

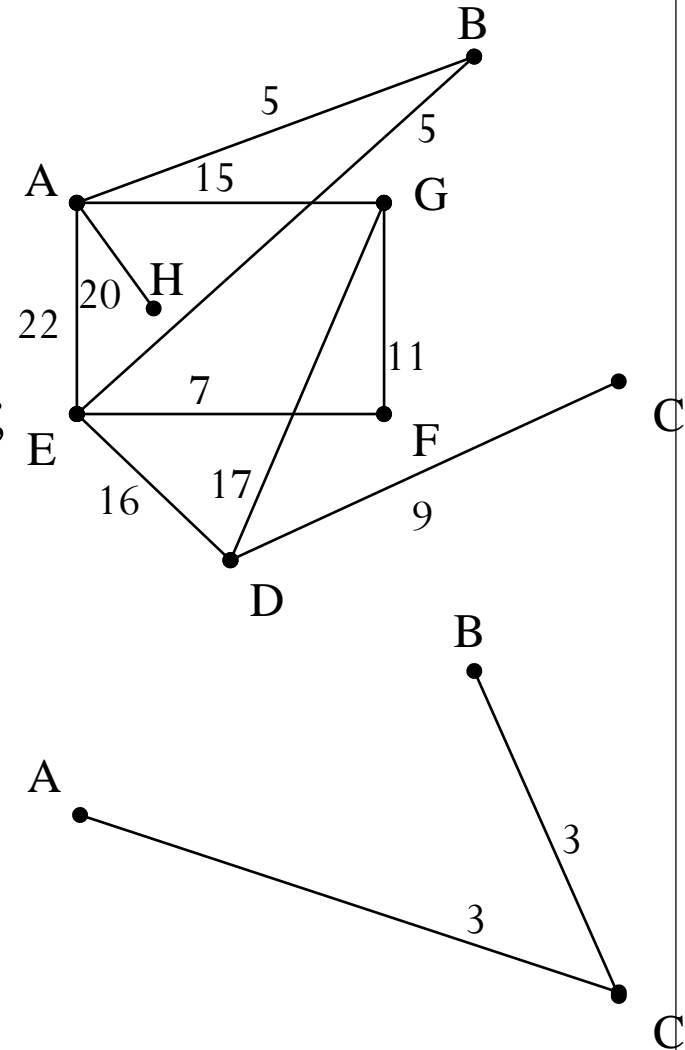


Ví dụ

$AB = 5; AC = 3; AE = 22; AG = 3;$
 $AH = 20; BC = 3; BE = 5; CD = 9;$
 $DE = 16; DG = 17; EF = 7; FG = 11;$

$T = \{AC\};$

$B2: \min E = BC \Rightarrow T = \{AC, BC\}$

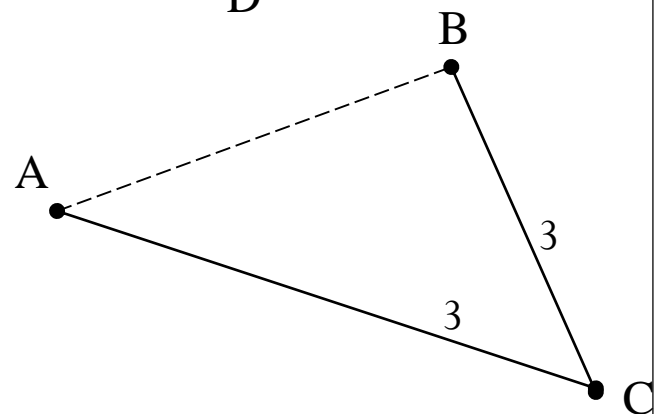
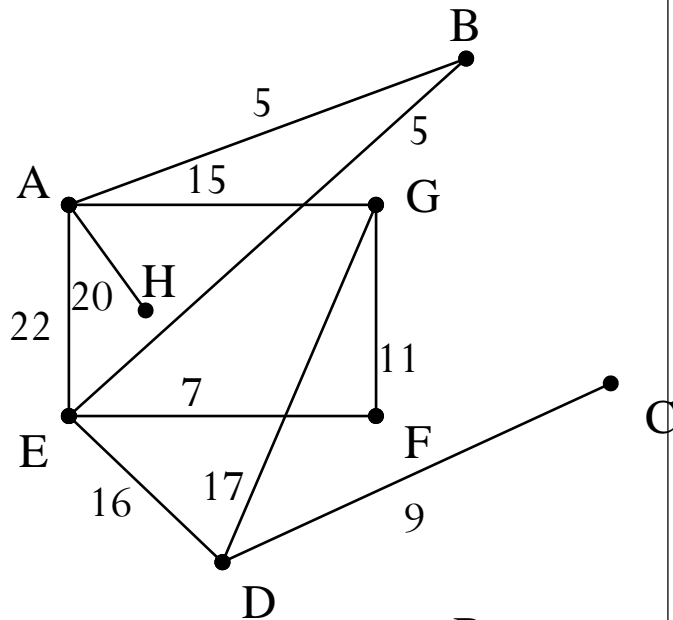


Ví dụ

$AB = 5; AC = 3; AE = 22; AG = 3;$
 $AH = 20; BC = 3; BE = 5; CD = 9;$
 $DE = 16; DG = 17; EF = 7; FG = 11;$

$T = \{AC, BC\};$

$\min E = AB \Rightarrow$ loại



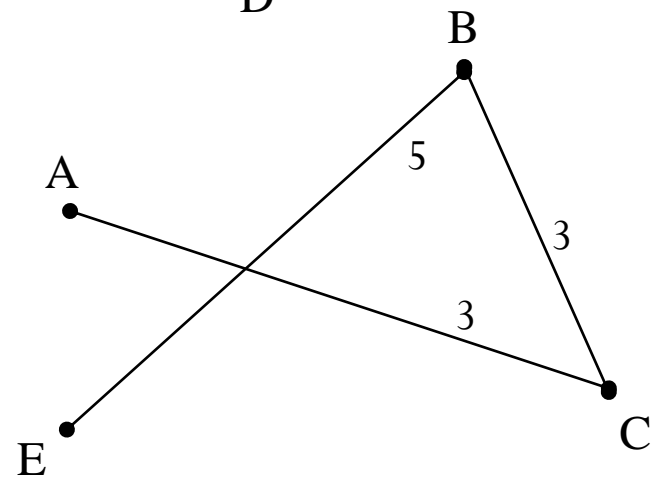
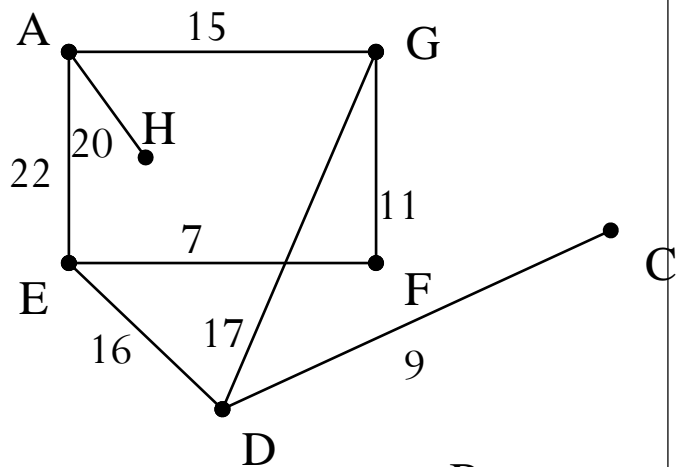
Ví dụ

$AB = 5; AC = 3; AE = 22; AG = 3;$
 $AH = 20; BC = 3; BE = 5; CD = 9;$
 $DE = 16; DG = 17; EF = 7; FG = 11;$

$T = \{AC, BC\};$

$\min E = AB \Rightarrow$ loại

$\min E = BE \Rightarrow T = \{AC, BC, BE\}$

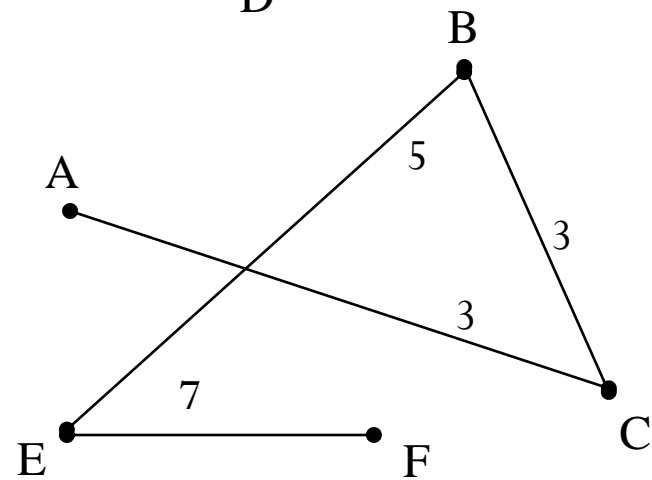
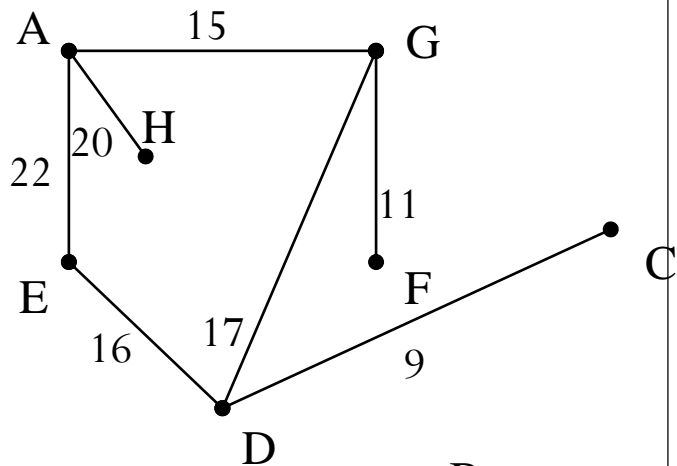


Ví dụ

$AB = 5$; $AC = 3$; $AE = 22$; $AG = 3$;
 $AH = 20$; $BC = 3$; $BE = 5$; $CD = 9$;
 $DE = 16$; $DG = 17$; $EF = 7$; $FG = 11$;

$T = \{AC, BC, BE\}$;

$\min E = EF \Rightarrow T = T \cup \{EF\}$

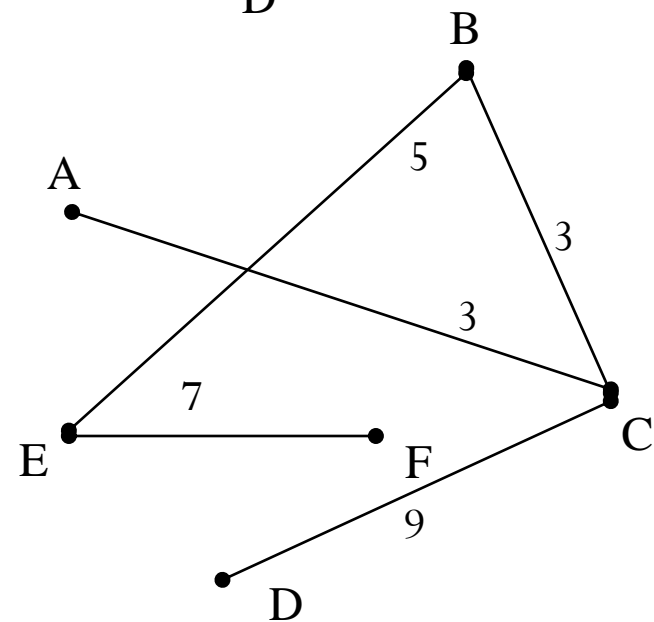
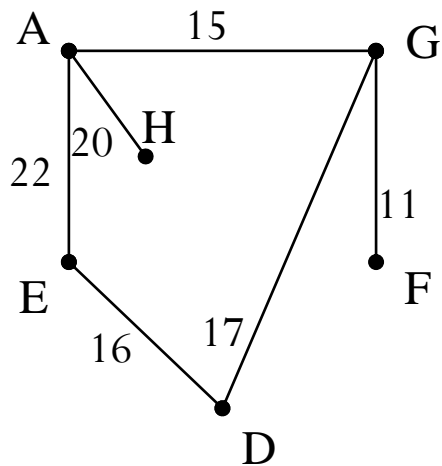


Ví dụ

$AB = 5; AC = 3; AE = 22; AG = 3;$
 $AH = 20; BC = 3; BE = 5; CD = 9;$
 $DE = 16; DG = 17; EF = 7; FG = 11;$

$T = \{AC, BC, BE, EF\};$

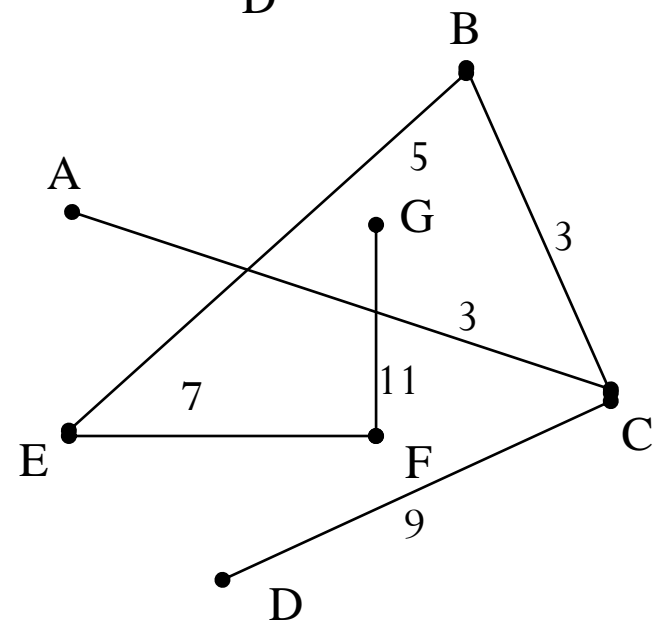
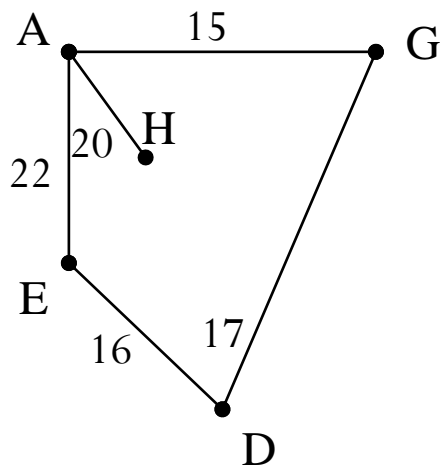
$\min E = CD \Rightarrow T = T \cup \{CD\}$



Ví dụ

$AB = 5; AC = 3; AE = 22; AG = 3;$
 $AH = 20; BC = 3; BE = 5; CD = 9;$
 $DE = 16; DG = 17; EF = 7; FG = 11;$

$T = \{AC, BC, BE, EF, CD\};$
 $\min E = GF \Rightarrow T = T \cup \{GF\}$

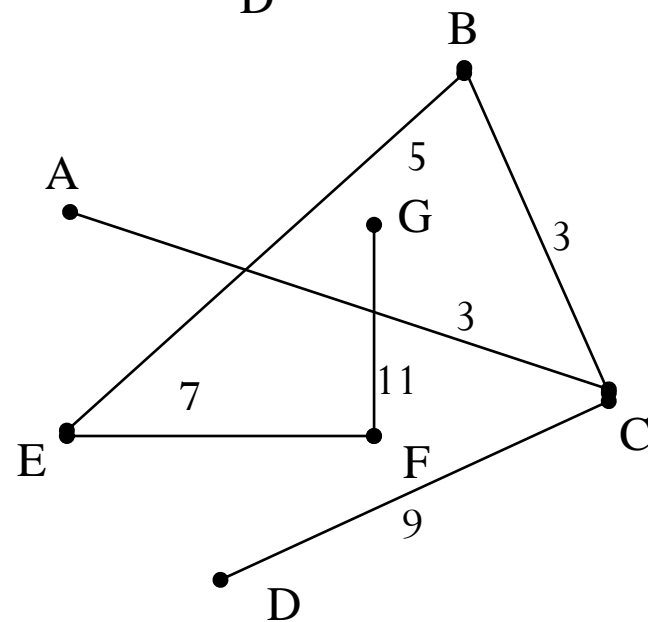
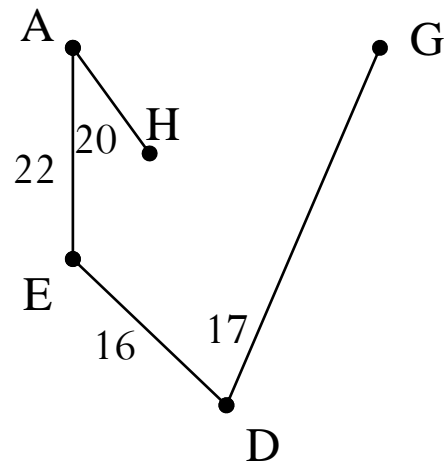


Ví dụ

$AB = 5; AC = 3; AE = 22; AG = 3;$
 $AH = 20; BC = 3; BE = 5; CD = 9;$
 $DE = 16; DG = 17; EF = 7; FG = 11;$

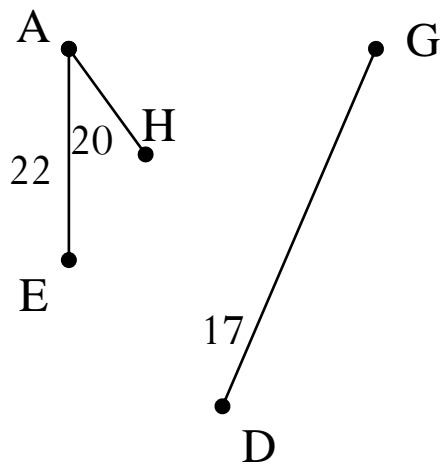
$T = \{AC, BC, BE, EF, CD, GF\};$

$\min E = AG \Rightarrow$ loại



Ví dụ

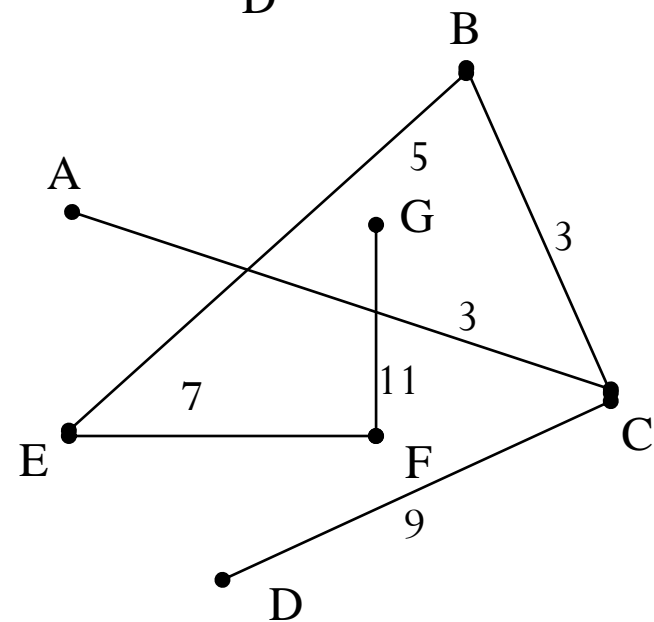
$AB = 5; AC = 3; AE = 22; AG = 3;$
 $AH = 20; BC = 3; BE = 5; CD = 9;$
 $DE = 16; DG = 17; EF = 7; FG = 11;$



$T = \{AC, BC, BE, EF, CD, GF\};$

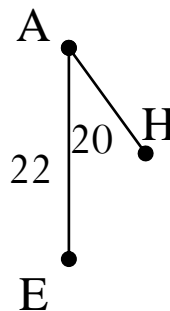
$\min E = AG \Rightarrow$ loại

$\min E = ED \Rightarrow$ loại



Ví dụ

$AB = 5; AC = 3; AE = 22; AG = 3;$
 $AH = 20; BC = 3; BE = 5; CD = 9;$
 $DE = 16; DG = 17; EF = 7; FG = 11;$

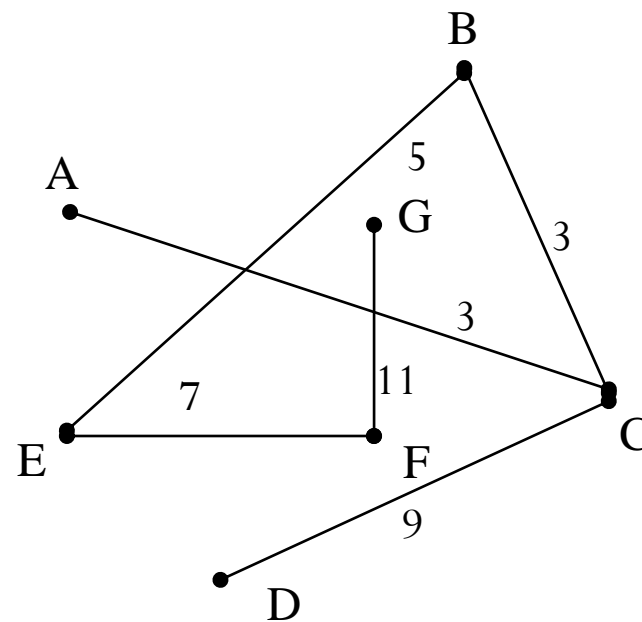


$T = \{AC, BC, BE, EF, CD, GF\};$

$\min E = AG \Rightarrow$ loại

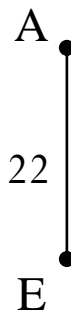
$\min E = ED \Rightarrow$ loại

$\min E = DG \Rightarrow$ loại



Ví dụ

$AB = 5; AC = 3; AE = 22; AG = 3;$
 $AH = 20; BC = 3; BE = 5; CD = 9;$
 $DE = 16; DG = 17; EF = 7; FG = 11;$



$T = \{AC, BC, BE, EF, CD, GF\};$

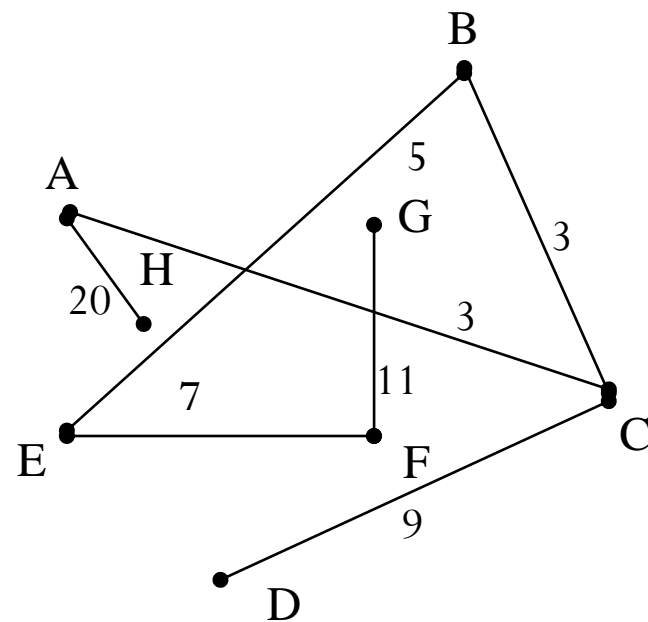
$\min E = AG \Rightarrow$ loại

$\min E = ED \Rightarrow$ loại

$\min E = DG \Rightarrow$ loại

$\min E = AH \Rightarrow T = T \cup \{AH\}$

T là cây khung của G \Rightarrow kết thúc



Thuật toán Prim

Cho đồ thị n đỉnh, liên thông, có trọng số $G = \langle V, E \rangle$

Thuật toán Prim: Tìm cây khung nhỏ nhất của G

B1: $W = \{u\}$; $F = \emptyset$ // u là đỉnh bất kỳ thuộc V

B2: Lập $E^* = \{vw \mid vw \in E; v \in W; w \notin W\}$

B3: Xét $e = \min E^* = v^*w^*$

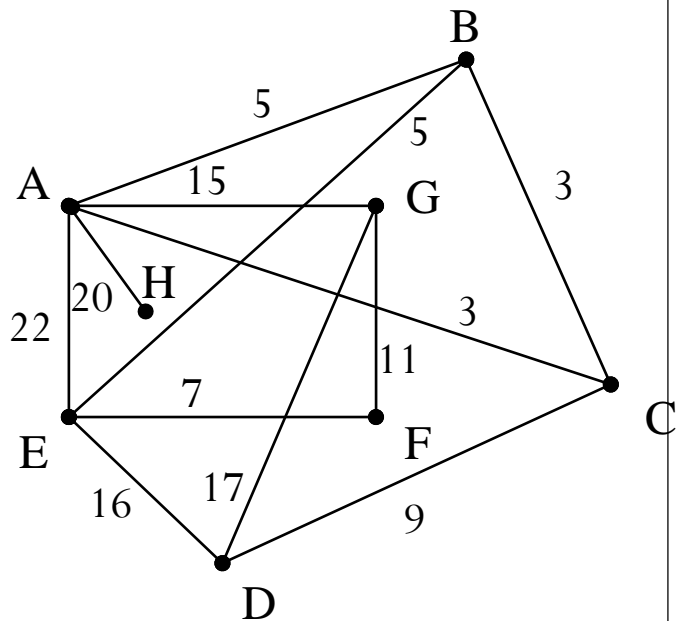
$W = W \cup \{w^*\}$; $F = F \cup \{e\}$

B4: Nếu $W = V \Rightarrow F$ chứa cạnh của cây khung nhỏ nhất

Nếu $W < V \Rightarrow$ quay lại bước 2

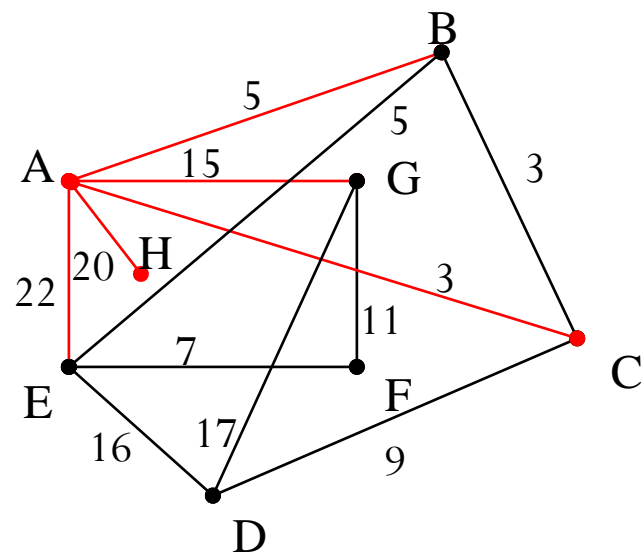
Ví dụ

$AB = 5$; $AC = 3$; $AE = 22$; $AG = 3$;
 $AH = 20$; $BC = 3$; $BE = 5$; $CD = 9$;
 $DE = 16$; $DG = 17$; $EF = 7$; $FG = 11$;



Ví dụ

$AB = 5; AC = 3; AE = 22; AG = 3;$
 $AH = 20; BC = 3; BE = 5; CD = 9;$
 $DE = 16; DG = 17; EF = 7; FG = 11;$



$W = \{A\}, F = \{\}$

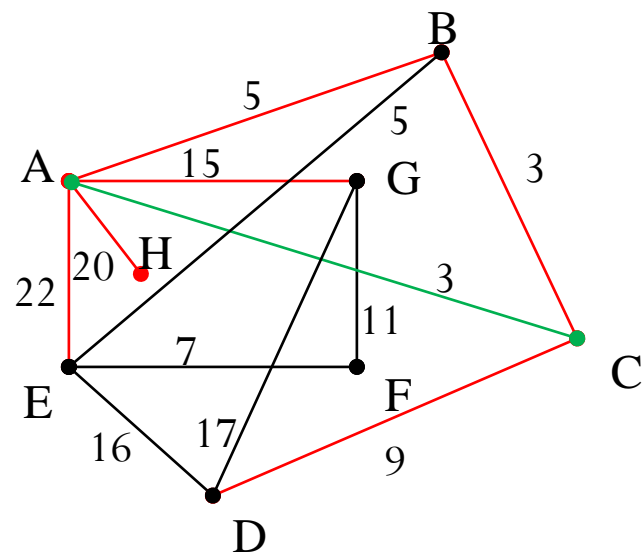
$E^* = \{AB_5; AC_3; AE_{22}; AG_{15}; AH_{20}\}$

$\text{Min } E^* = AC_3 \Rightarrow W = W \cup \{C\}; F = F \cup \{AC\}$

$W < V$

Ví dụ

$AB = 5; AC = 3; AE = 22; AG = 3;$
 $AH = 20; BC = 3; BE = 5; CD = 9;$
 $DE = 16; DG = 17; EF = 7; FG = 11;$



$W = \{A, C\}, F = \{AC\}$

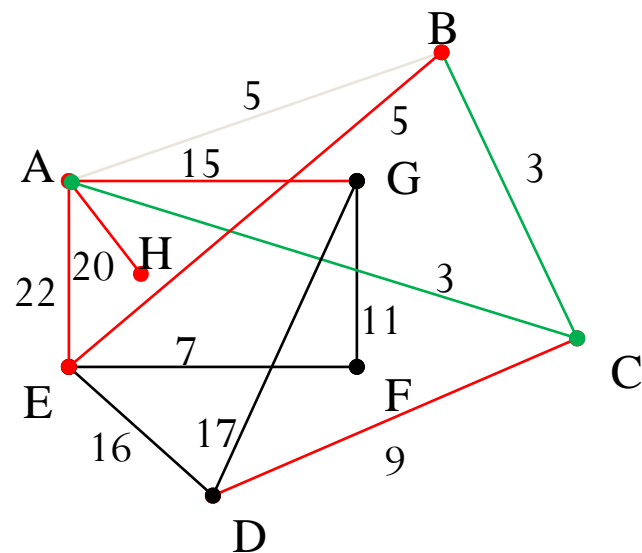
$E^* = \{CB_3; CD_9; AE_{22}; AG_{15}; AH_{20}\}$

$\text{Min } E^* = CB_3 \Rightarrow W = W \cup \{B\}; F = F \cup \{CB\}$

$W < V$

Ví dụ

$AB = 5; AC = 3; AE = 22; AG = 3;$
 $AH = 20; BC = 3; BE = 5; CD = 9;$
 $DE = 16; DG = 17; EF = 7; FG = 11;$



$W = \{A, C, B\}, F = \{AC, CB\}$

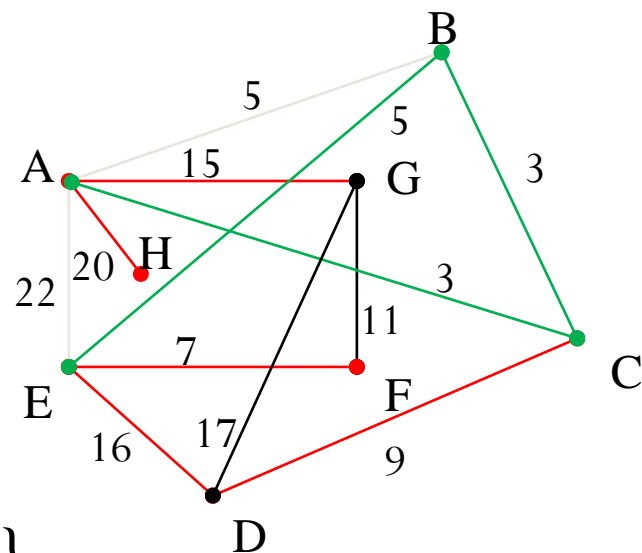
$E^* = \{CD_9; BE_5; AG_{15}; AH_{20};\}$

$\text{Min } E^* = BE_5 \Rightarrow W = W \cup \{E\}; F = F \cup \{BE\}$

$W < V$

Ví dụ

$AB = 5; AC = 3; AE = 22; AG = 3;$
 $AH = 20; BC = 3; BE = 5; CD = 9;$
 $DE = 16; DG = 17; EF = 7; FG = 11;$



$W = \{A, C, B, E\}, F = \{AC, CB, BE\}$

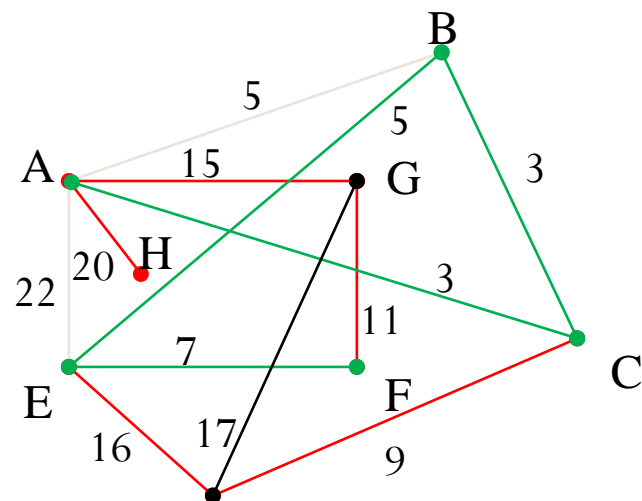
$E^* = \{CD_9; EF_7; AG_{15}; AH_{20};\}$

$\text{Min } E^* = EF_7 \Rightarrow W = W \cup \{F\}; F = F \cup \{EF\}$

$W < V$

Ví dụ

$AB = 5$; $AC = 3$; $AE = 22$; $AG = 3$;
 $AH = 20$; $BC = 3$; $BE = 5$; $CD = 9$;
 $DE = 16$; $DG = 17$; $EF = 7$; $FG = 11$;



$W = \{A, C, B, E, F\}$, $F = \{AC, CB, BE, EF\}^D$

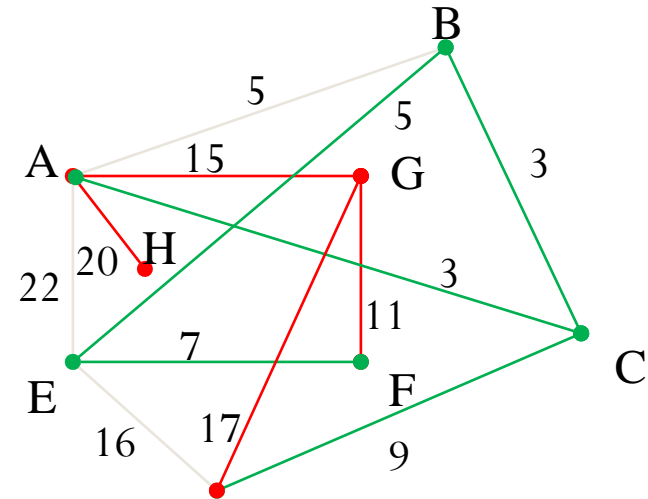
$E^* = \{CD_9; FG_{11}; AH_{20};\}$

$\text{Min } E^* = CD_9 \Rightarrow W = W \cup \{D\}; F = F \cup \{CD\}$

$W < V$

Ví dụ

$AB = 5; AC = 3; AE = 22; AG = 3;$
 $AH = 20; BC = 3; BE = 5; CD = 9;$
 $DE = 16; DG = 17; EF = 7; FG = 11;$



$W = \{A, C, B, E, F, D\}, F = \{AC, CB, BE, EF, CD\}$

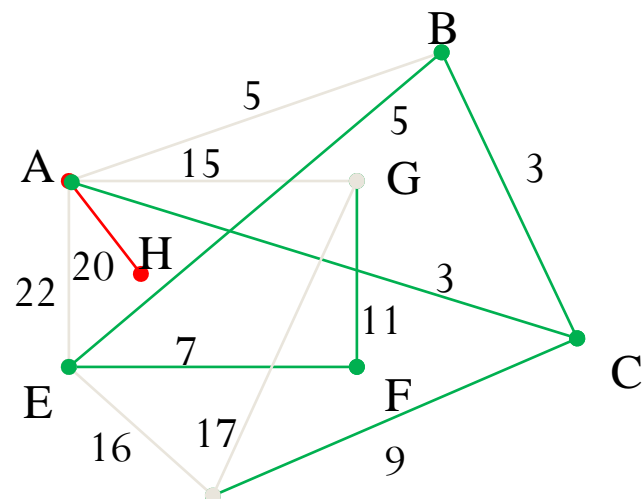
$E^* = \{FG_{11}; AH_{20}\}$

$\text{Min } E^* = FG_{11} \Rightarrow W = W \cup \{G\}; F = F \cup \{FG\}$

$W < V$

Ví dụ

$AB = 5; AC = 3; AE = 22; AG = 3;$
 $AH = 20; BC = 3; BE = 5; CD = 9;$
 $DE = 16; DG = 17; EF = 7; FG = 11;$



$W = \{A, C, B, E, F, D, G\}, F = \{AC, CB, BE, EF, CD, FG\}$

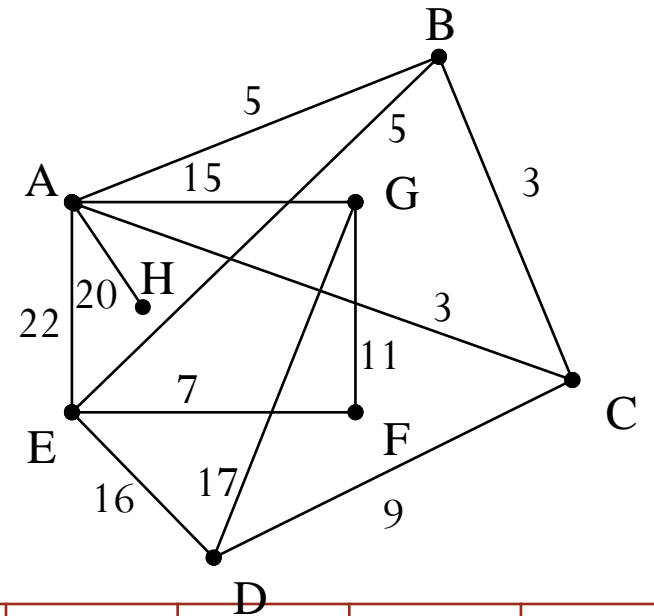
$E^* = \{AH_{20}\}$

$\text{Min } E^* = AH_{20} \Rightarrow W = W \cup \{H\}; F = F \cup \{AH\}$

$W = V \Rightarrow$ Cây khung nhỏ nhất gồm các cạnh:

$\{AC, CB, BE, EF, CD, FG, AH\}$

Ví dụ



BƯỚC	A	B	C	D	E	F	G	H	W	F
	0, A	5, A	3, A	∞ , A	22, A	∞ , A	15, A	20, A	A	{}
1	-	5, A	-	9, C	22, A	∞ , A	15, A	20, A	A, C	{AC}
2	-	-	-	9, C	5, B	∞ , A	15, A	20, A	A, C, B	...
3	-	-	-	9, C	-	7, E	15, A	20, A
4	-	-	-	9, C	-	-	11, F	20, A
5	-	-	-	-	-	-	11, F	20, A
6	-	-	-	-	-	-	-	20, A		