Đồ thị Euler và đồ thị Hamilton

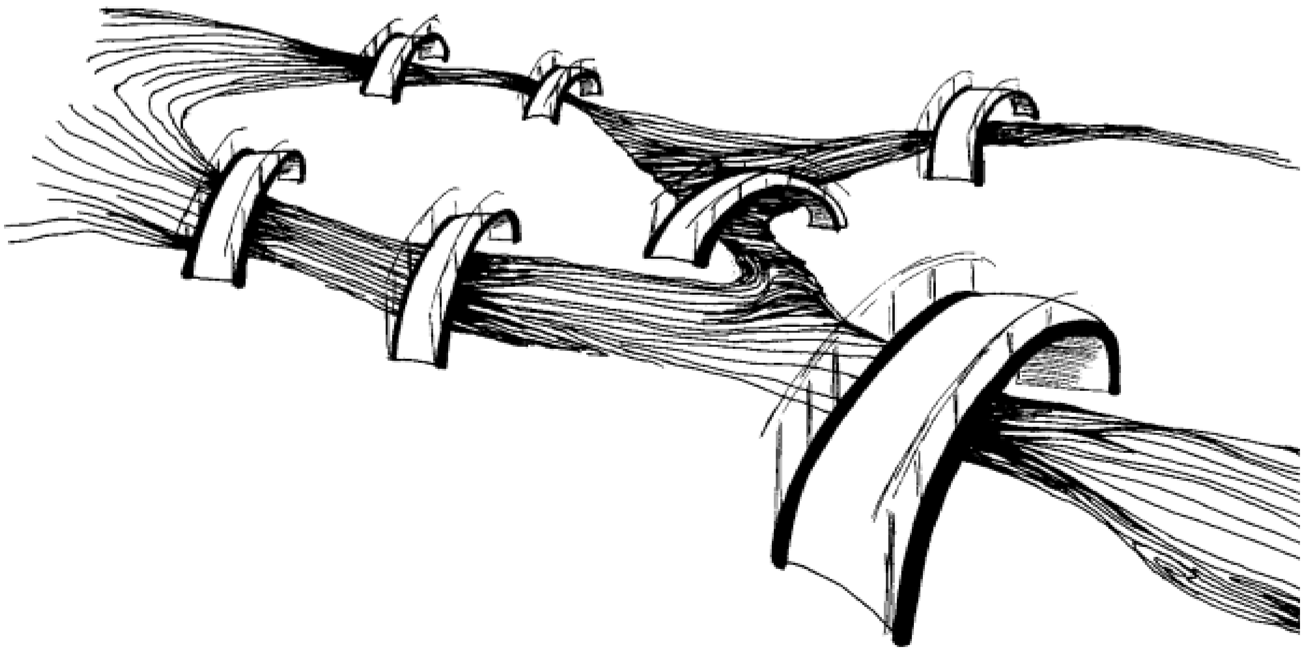
Nội dung

- Giới thiệu
- Đồ thị Euler
- Đồ thị Hamilton

Giới thiệu

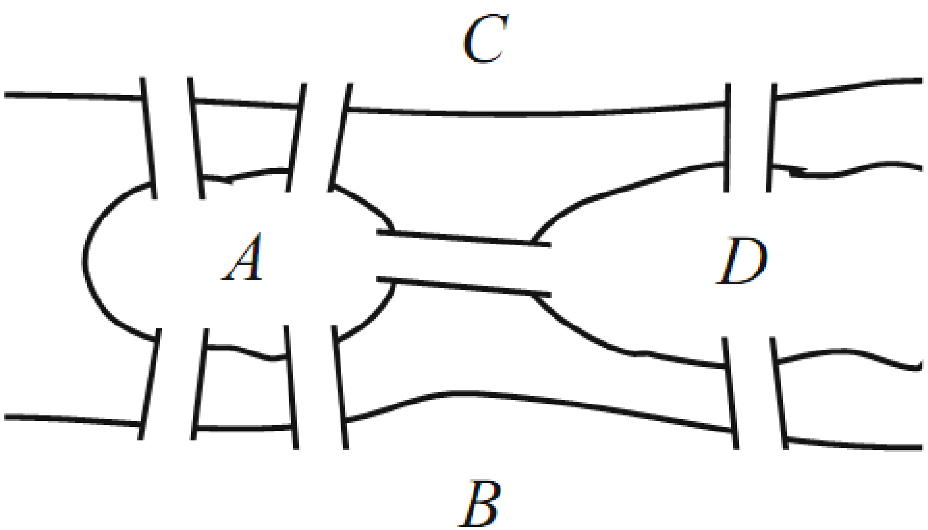
Bài toán bảy cây cầu ở Königsberg

- Königsberg = 2 hòn đảo lớn nối với nhau và với đất liền bởi bảy cây cầu
- Tìm một tuyến đường đi qua tất cả các cây cầu, mỗi cầu đi qua đúng 1 lần



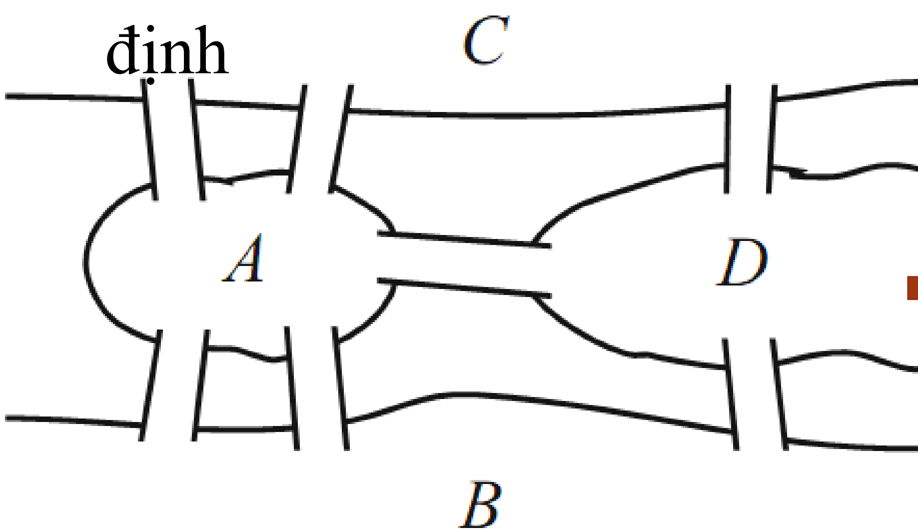
Bài toán bảy cây cầu ở Königsberg

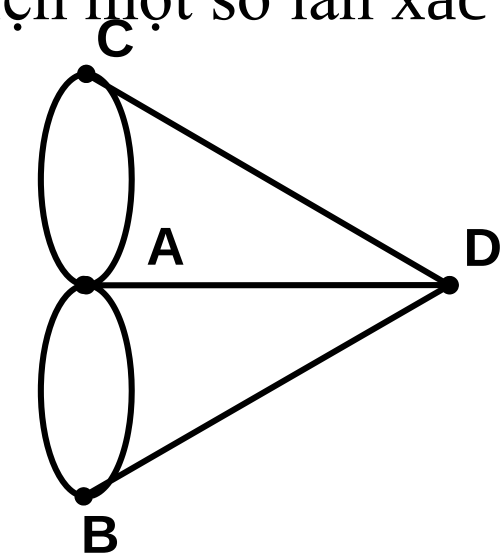
- Euler đã sử dụng các chuỗi kí tự để mô tả đường đi thỏa mãn không có cầu nào bị lặp lại
- Ví dụ: ACABADB: xuất phát từ A đi qua các cầu AC, CA, AB, BA, AD, DB; còn thiếu CD (DC)



Bài toán bảy cây cầu ở Königsberg

- Euler đã sử dụng các chuỗi kí tự để mô tả đường đi thỏa mãn không có cầu nào bị lặp lại
- Ví dụ: ACABADB: xuất phát từ A đi qua các cầu AC, CA, AB, BA, AD, DB; còn thiếu CD (DC)
- Bài toán trở thành: tìm một dãy 8 kí tự lập được từ A, B, C, D sao cho mỗi cặp kí tự xuất hiện một số lần xác định



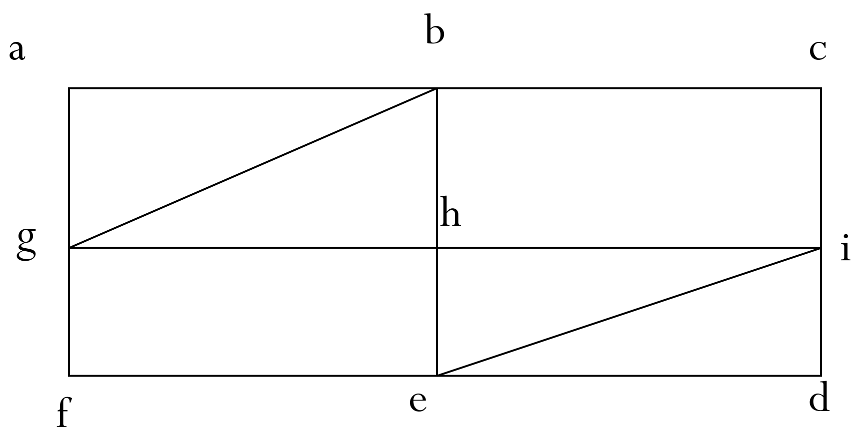


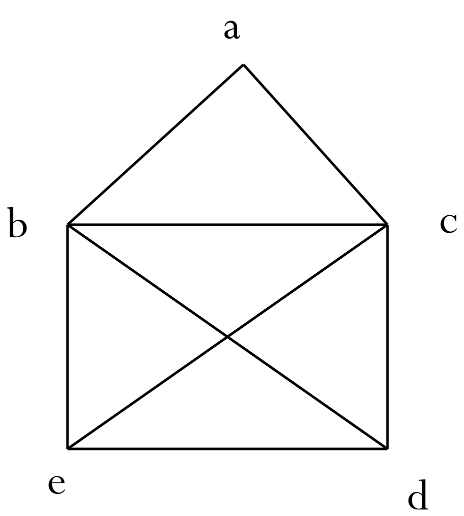
Bài toán bảy cây cầu ở Königsberg

- Ta thấy:
  - Từ D có 3 cây cầu => kí tự D phải xuất hiện ít nhất 2 lần trong dãy
  - Tương tự: B, C có 3 cây cầu => mỗi kí tự B, C phải xuất hiện ít nhất 2 lần trong dãy
  - Từ A có 5 cây cầu => A phải xuất hiện 3 lần trong dãy
- Như vậy: Dãy thỏa mãn điều kiện cần ít nhất 3 kí tự A, 2 kí tự B, 2 kí tự D. (tổng cộng: 9 kí tự)

Mở rộng sang các đồ thị khác

- Có thể vẽ được những đồ thị sau bằng một nét bút hay không? (không tô lại các cạnh đã vẽ, không nhấc bút trong khi vẽ)

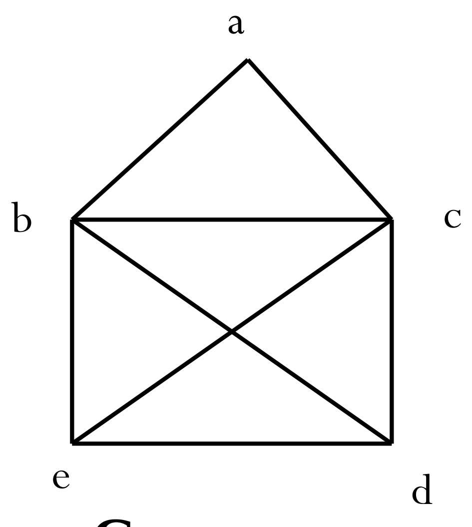




Đồ thị Euler

Đường đi Euler, chu trình Euler

- Xét đồ thị G = <V, E>.
  - Một đường đi trên đồ thị được gọi là đường đi Euler nếu nó đi qua tất cả các cạnh, mỗi cạnh một lần.
  - Một chu trình trên đồ thị được gọi là chu trình Euler nếu nó đi qua tất cả các cạnh, mỗi cạnh một lần.
- Ví dụ:
  - Đường đi: e, b, a, c, b, d, c, e, d.
  - Đường đi: d, e, b, a, c, b, d, c, e.
  - Chu trình?



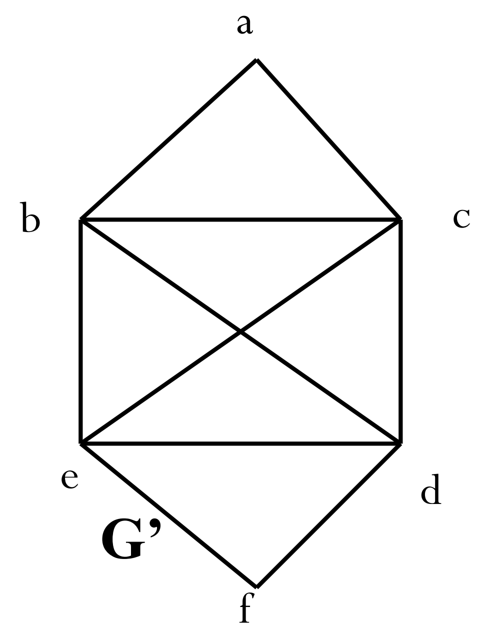
G

Đường đi Euler, chu trình Euler

- Xét đồ thị G = <V, E>.
  - Một đường đi trên đồ thị được gọi là đường đi Euler nếu nó đi qua tất cả các cạnh, mỗi cạnh một lần.
  - Một chu trình trên đồ thị được gọi là chu trình Euler nếu nó đi qua tất cả các cạnh, mỗi cạnh một lần.
- Ví dụ:
  - Đường đi: e, b, a, c, b, d, c, e, d.
  - Đường đi: d, e, b, a, c, b, d, c, e.
  - Chu trình:

    a, b, c, e, b, d, e, f, d, c, a

    …



Đồ thị Euler

- Định nghĩa: Xét đồ thị G = <V, E>
  - Đồ thị Euler là đồ thị chứa chu trình Euler
  - Đồ thị nửa Euler là đồ thị chứa đường đi Euler
- Ví dụ: G: đồ thị nửa Euler; G’: đồ thị Euler

Định lý Euler

- **Định lý.** Đồ thị vô hướng, liên thông G là đồ thị Euler khi và chỉ khi mọi đỉnh của nó đều có bậc chẵn.
  - Cần: đơn giản
  - Đủ: Quy nạp, sử dụng bổ đề: Nếu mọi đỉnh của đồ thị đều có bậc >=2 thì đồ thị có chu trình
- **Hệ quả.** Đồ thị vô hướng, liên thông G là đồ thị nửa Euler khi và chỉ khi nó có không quá hai đỉnh bậc lẻ.
  - Giả sử 2 đỉnh bậc lẻ là u và v: thêm cạnh uv vào G

Bài toán tìm chu trình Euler

- Bài toán: tìm chu trình Euler trong một đồ thị Euler cho trước
  - Input: Đồ thị Euler G = (V, E)
  - Output: Chu trình Euler trong G
- Thuật toán:
  - Hierholzer
  - Fleury

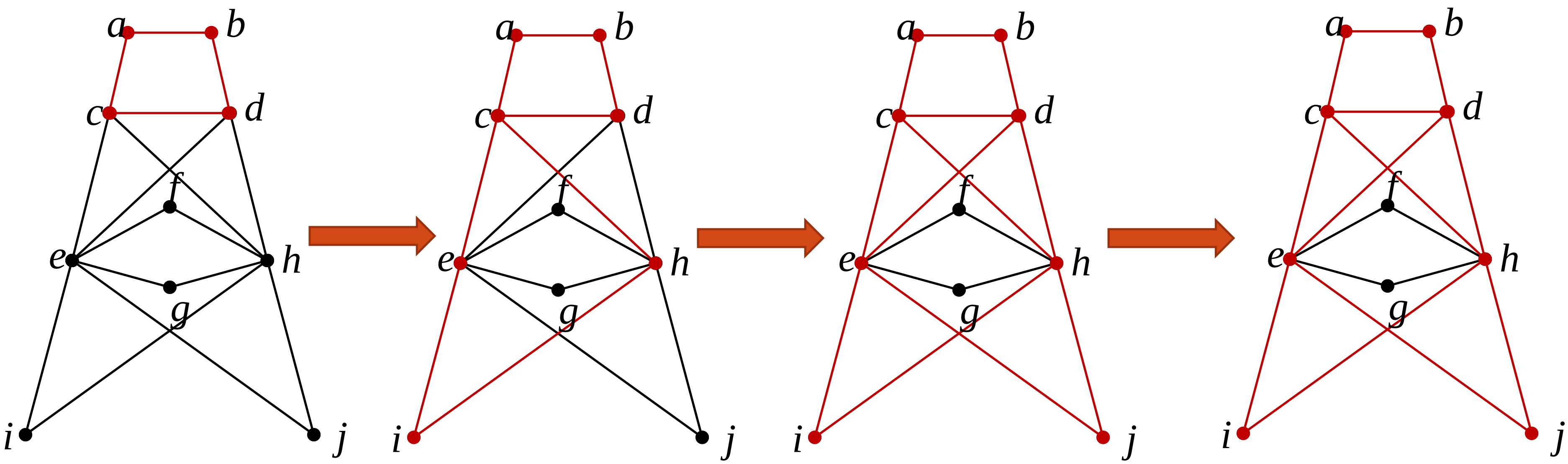
Thuật toán Hierholzer

- B1: Xác định 1 chu trình đơn của G là R_1; i = 1
- B2: Nếu R_i chứa toàn bộ : kết thúc; R_i là kết quả
- B3: Nếu R_i không chứa toàn bộ G

  Xét đỉnh $v_i \in R_i$ là đỉnh của cạnh e_j không thuộc R_i
- B4: Xác định chu trình đơn Q_i bắt đầu từ v_i, đi qua e_j
- B5: Tạo R_{i+1} bằng cách thay v_i trong R_i bằng Q_i
- B6: Tăng i lên 1, quay lại bước 2.

Thuật toán Hierholzer

- Ví dụ:



R_1 = a, b, d, c, a
Q_1 = c, e, i, h, c

R_2 = a, b, d, **c, e, i,**
h, c, a
Q_2 = e, d, h, j, e

R_3 = a, b, d, c, **e**, **d, h, j,**
e, i, h, c, a
Q_3 = e, f, h, g, e

R_4 = a, b, d, c, **e**, **f, h, g,**
e, d, h, j e, i, h, c, a
=> Xong

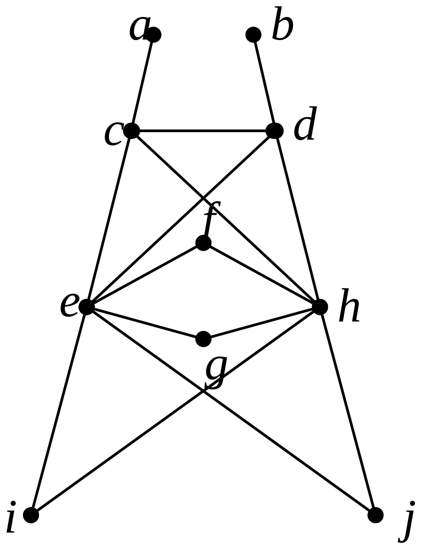
Thuật toán Fleury

- B1: xét 1 đỉnh v bất kỳ
- B2: Nếu đã đi qua tất cả các cạnh của G => kết thúc
- B3:
  - Nếu trong các cạnh kề với v có 1 cạnh không phải là cầu, chọn cạnh đó
  - Nếu các cạnh kề với v đều là cầu thì chọn bất kỳ
  - Xóa cạnh vừa chọn và các đỉnh cô lập nếu có
  - Chuyển sang xét đỉnh còn lại của cạnh vừa chọn
- B4: quay lại bước 2

Ví dụ

- Bắt đầu: a

→ ab



Ví dụ

- Bắt đầu: a

$\rightarrow$ ab $\rightarrow$ bd $\rightarrow$ dc $\rightarrow$ ce $\rightarrow$ ei

$\rightarrow$ ih

$\rightarrow$ hf

$\rightarrow$ fe

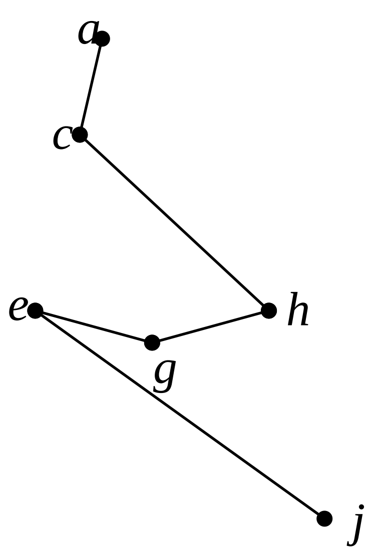
$\rightarrow$ ed

$\rightarrow$ dh

$\rightarrow$ hj

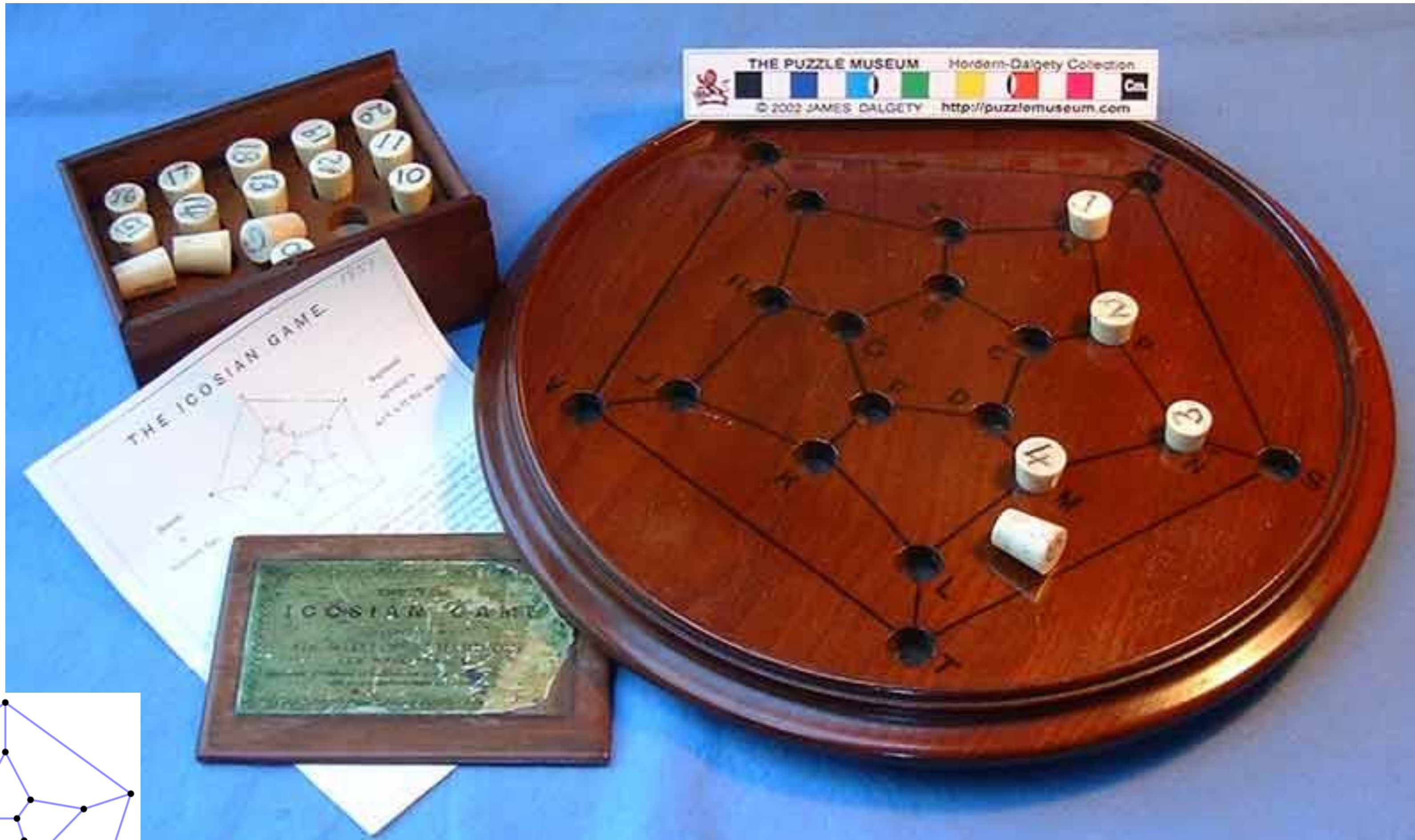
$\rightarrow$ je $\rightarrow$ eg $\rightarrow$ gh $\rightarrow$ hc $\rightarrow$ ca

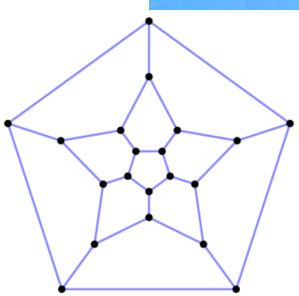
=> kết thúc



Đồ thị Hamilton

Trò chơi Icosian





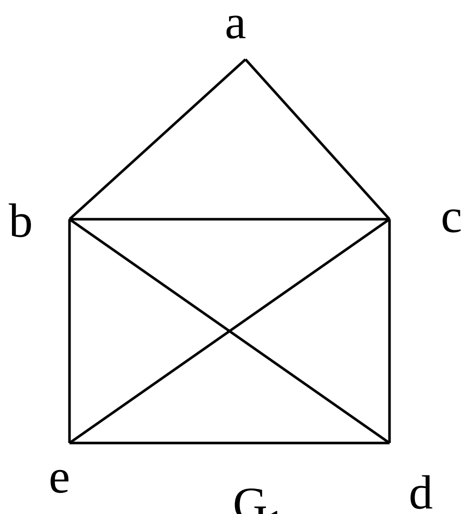
Định nghĩa

Xét đồ thị G = <V, E>

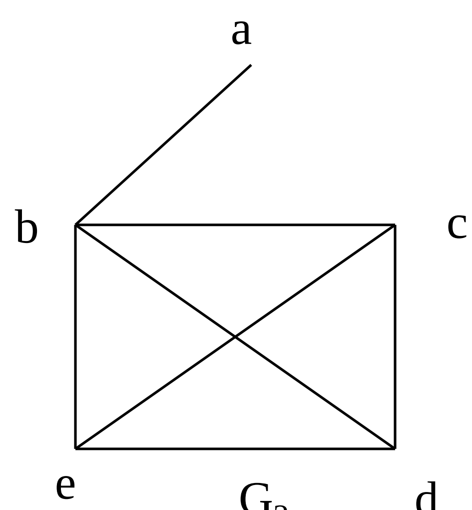
- Đường đi Hamilton là đường đi sơ cấp, qua mọi đỉnh của đồ thị
- Chu trình Hamilton là chu trình sơ cấp, qua mọi đỉnh của đồ thị
- Đồ thị G chứa chu trình Hamilton gọi là đồ thị Hamilton
- Đồ thị G chứa đường đi Hamilton gọi là nửa Hamilton

Ví dụ

	Đường đi	Chu trình
G_1	a, b, c, d, e	a, b, d, e, c, a
G_2	e, d, c, b, a	Không có



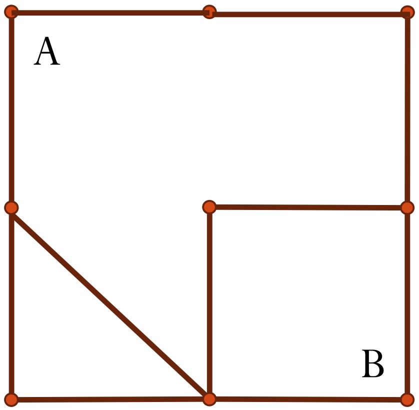
G_1



G_2

Ứng dụng

- Traveling salesman: Đi tới tất cả các địa điểm cần đến với đường đi ngắn nhất?
- Gray code: mã hóa chuỗi bit độ dài xác định sao cho chỉ phải thay đổi 1 bit mỗi lần
- Taxicab: Tài xế có thể đi từ A đến B và đón tất cả các khách hàng, không đi qua địa điểm nào nhiều hơn 1 lần?



Một số luật khi tìm chu trình Hamilton

Cho đồ thị G = <V, E>

- Luật 1: Nếu đỉnh v có bậc < 2: không có chu trình H
- Luật 2: Nếu đỉnh v có deg(v) = 2 => 2 cạnh đều xuất hiện trong chu trình H.
- Luật 3: Khi đã chọn 2 cạnh nào đó của 1 đỉnh, xóa tất cả các cạnh còn lại
- Luật 4: Nếu đỉnh v kề với >2 đỉnh bậc 2 => không có chu trình H

Điều kiện đủ

Đồ thị G = <V, E>; n = |V| ≥ 3

Định lý 1:

Nếu $deg(v) \geq {}^{n}/_{2}\, \forall v \in V$ thì G là đồ thị Hamilton

Định lý 2:

Nếu $deg(u) + \deg(v) \geq n\ \forall (u, v) \notin E$ thì G là đồ thị Hamilton

Định lý 3:

Đồ thị có hướng G liên thông mạnh và

$$\deg^{+}(v) \geq \frac{n}{2} \ \ ; \ \ \deg^{-}(v) \geq \frac{n}{2}, \forall v \in V$$

thì G là đồ thị Hamilton