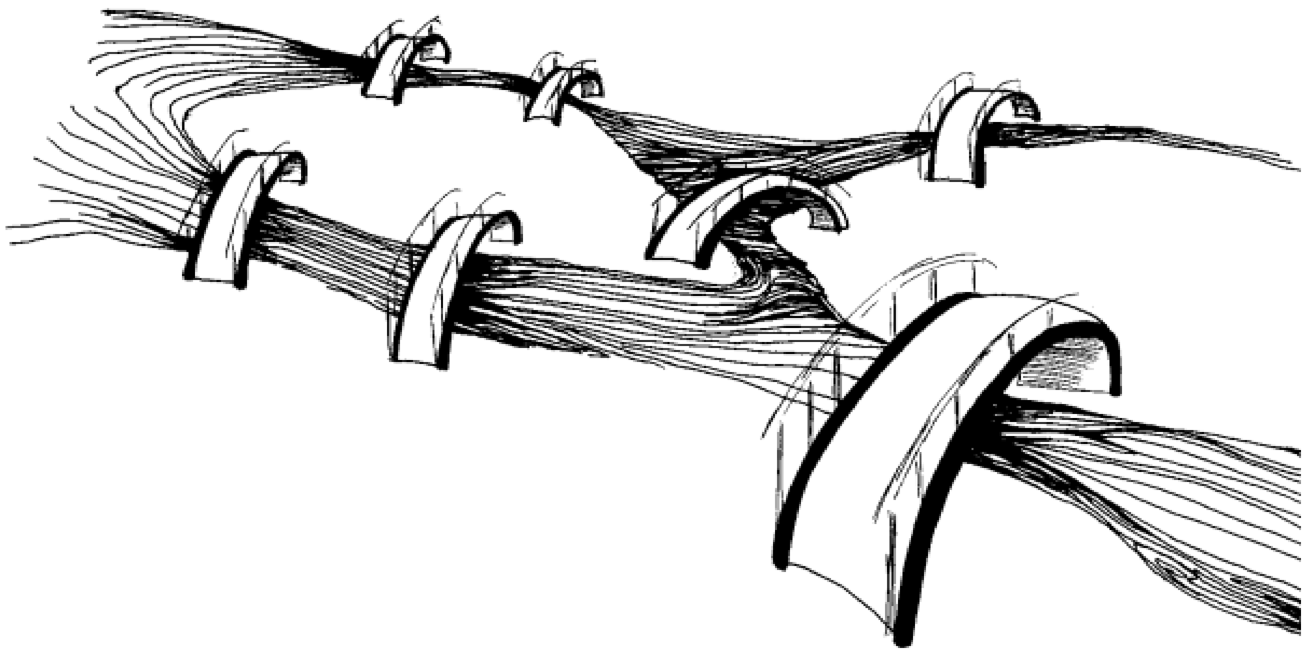
Đồ thị

Nội dung

- Định nghĩa
- Các khái niệm cơ bản
- Một số dạng đồ thị đặc biệt

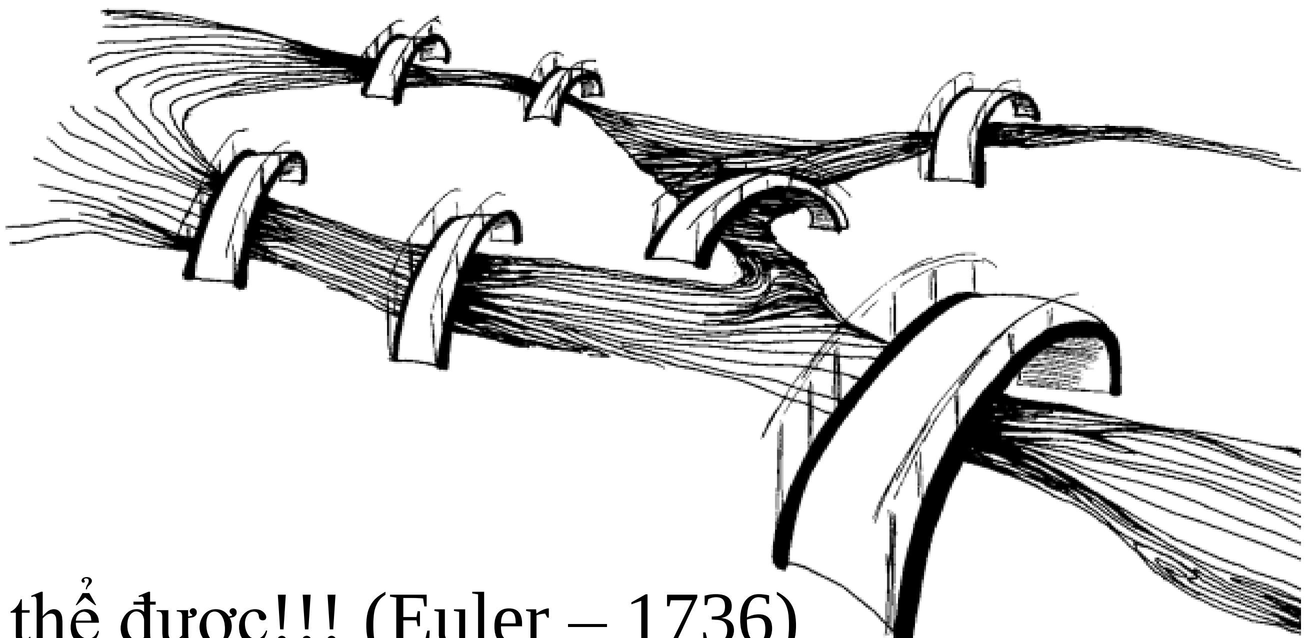
Bảy cây cầu ở Königsberg

- Königsberg = 2 hòn đảo lớn nối với nhau và với đất liền bởi bảy cây cầu
- Tìm một tuyến đường đi qua tất cả các cây cầu, mỗi cầu đi qua đúng 1 lần



Bảy cây cầu ở Königsberg

- Königsberg = 2 hòn đảo lớn nối với nhau và với đất liền bởi bảy cây cầu
- Tìm một tuyến đường đi qua tất cả các cây cầu, mỗi cầu đi qua đúng 1 lần



Không thể được!!! (Euler – 1736)

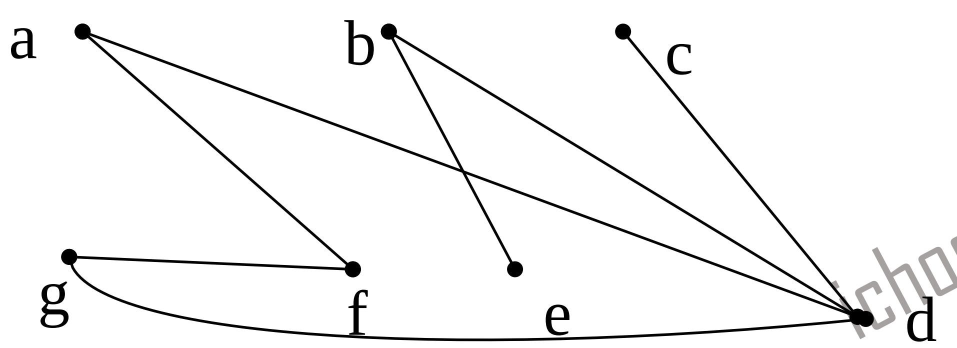
Định nghĩa

Đơn đồ thị vô hướng

- *Một đồ thị gồm 2 tập hữu hạn: G= (V, E). Mỗi phần tử của V là một đỉnh của đồ thị. Mỗi phần tử của E - được gọi là một cạnh của đồ thị - là một cặp* không có *thứ tự gồm 2 phần tử* khác nhau *của V.*
- Ví dụ: G = (V, E)

  V = {a, b, c, d, e, f, g}

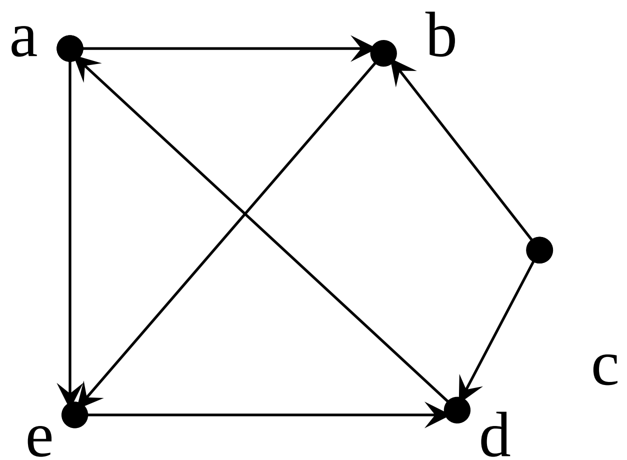
  E = {{a, d}, {a, f}, {b, d}, {b, e}, {c, d}, {d, g}, {f, g}}



Đồ thị có hướng

Thay đổi các điều kiện trên các tập E, V ta có định nghĩa cho các loại đồ thị khác

a. Thay tập E bằng tập các cặp đỉnh có thứ tự ta thu được *đồ thị có hướng*

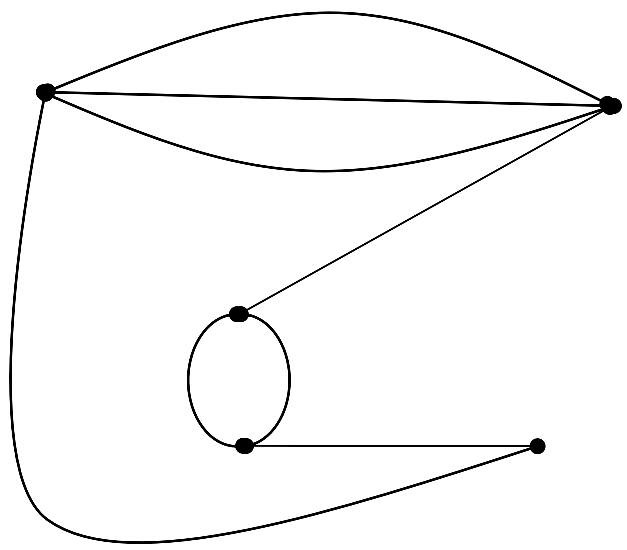


Các cặp đỉnh được gọi là cung

Đồ thị vô hướng thu được từ đồ thị có hướng, bỏ đi chiều gọi là đồ thị vô hướng nền của đồ thị có hướng tương ứng

Đa đồ thị

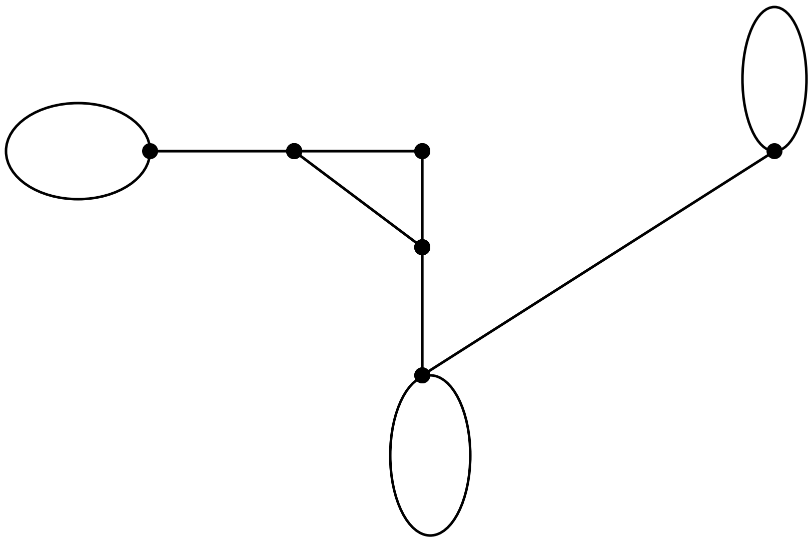
b. Cho phép các phần tử trong tập cạnh được lặp lại ta có *đa đồ thị*



2 cạnh là cạnh lặp nếu chúng tương ứng cùng 1 cặp đỉnh

Giả đồ thị

c. Cho phép một cạnh liên kết một đỉnh với chính nó ta có *giả đồ thị*



Cạnh có dạng (u, u) gọi là *khuyên*

Bài tập

1. 10 người ngồi quanh 1 bàn tròn, mỗi người bắt tay với tất cả những người còn lại, trừ người ngồi đối diện với mình qua bàn. Vẽ đồ thị mô tả sự việc này

2. Có 10 người bạn An, Bình, Mai, Hoa, Tâm, Hải, Huyền, Hương, Trang, Yến cùng đi du lịch. Khi thuê phòng ks cần chia vào các phòng khác nhau. Mỗi người liệt kê ra một danh sách những người mình thích chung phòng:

An: Huyền, Trang	Bình: An, Hương	Mai: Hoa
Hoa: Tâm, Hải, Yến	Tâm: An, Hoa	Hải: Bình, Yến
Huyền: Bình, An	Hương: An, Mai, Tâm	Trang: Mai
Yến: An, Huyền, Trang		

Hãy vẽ đồ thị biểu diễn những yêu cầu này..

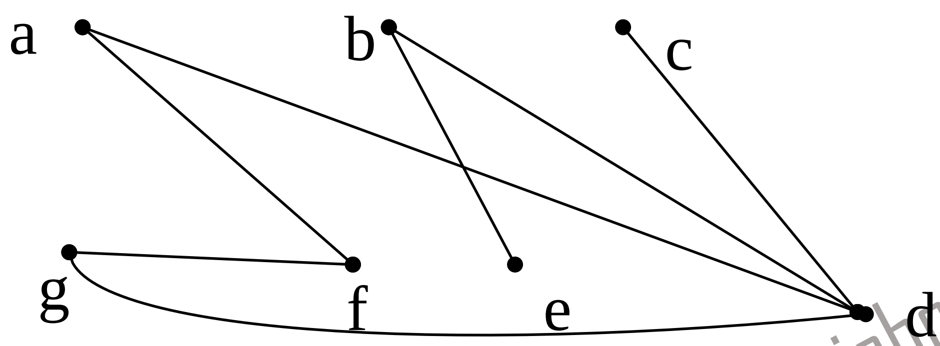
Các khái niệm cơ bản

Các khái niệm cơ bản

Cạnh e = {u, v} được viết gọn: e = *uv*

Với một đồ thị G = (V, E) nếu *e* ∈ E:

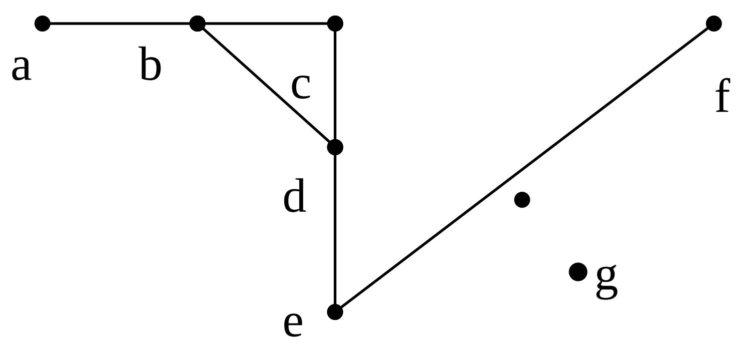
- 2 đỉnh u và v là 2 đỉnh kề nhau
- u và v là 2 đỉnh đầu của cạnh e
- Cạnh e là liên thuộc với 2 đỉnh u, v
- 2 đỉnh u và v là không kề nhau nếu uv ∉ E



Bậc của đỉnh

Xét một đỉnh v ∈ V

- Bậc của đỉnh v được ký hiệu: deg(v)
- Được tính bằng số cạnh liên thuộc với đỉnh v
- Đỉnh bậc 0 là đỉnh cô lập; bậc 1 là đỉnh treo



Ví dụ: deg(a) = 1 – đỉnh treo; deg(g) = 0 – đỉnh cô lập

deg(c) = 2,…

Bậc của đỉnh

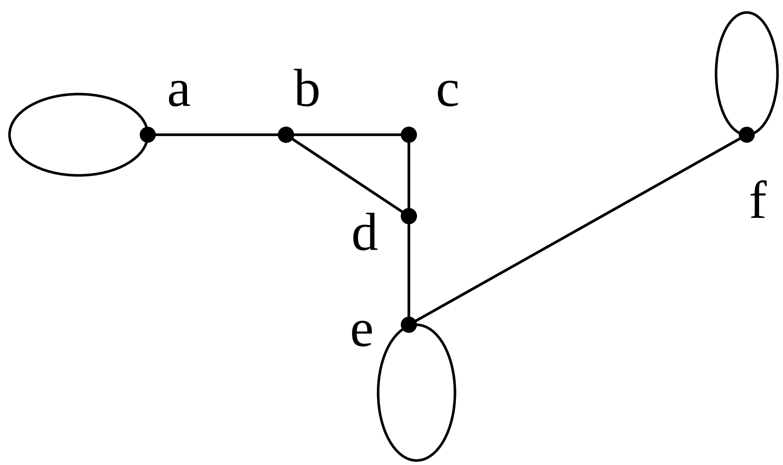
Định lý 1:

Giả sử G = (V, E) là một đồ thị vô hướng m cạnh khi đó

$$2m = \sum_{v \in V} \deg(v)$$

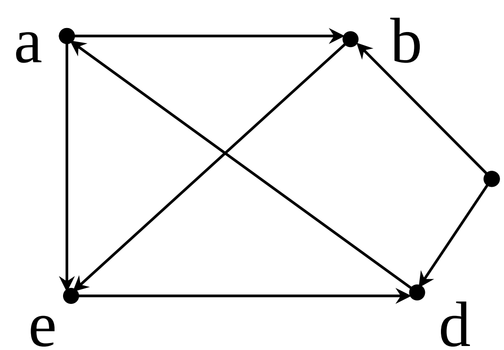
Hệ quả:

Trong đồ thị vô hướng, số đỉnh bậc lẻ luôn là số chẵn



Bậc của đỉnh

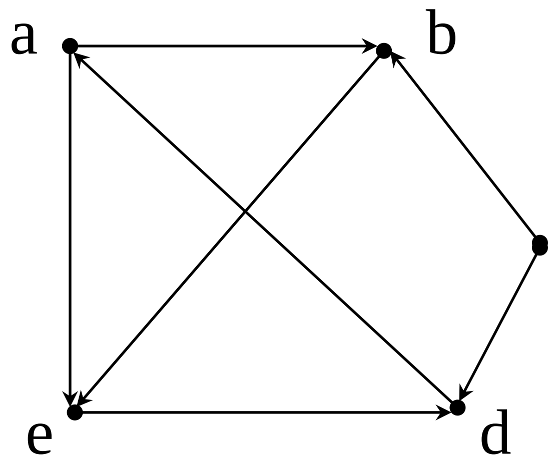
- Các thuật ngữ tương tự đối với đồ thị có hướng:
  - Với e = {u, v} ∈ E:
  - e là 1 cung của đồ thị, *u* và *v* là 2 đỉnh kề nhau
  - Cung e đi ra khỏi *u*, đi vào *v*
  - *u (v)* được gọi là đỉnh đầu (cuối) của cung e (cung {u, v})
  - Với đỉnh v ∈ V:
  - Số cung trong đồ thị đi ra khỏi v là bán bậc ra: $deg^+(v)$
  - Số cung trong đồ thị đi vào v là bán bậc vào: $deg^-(v)$



Bậc của đỉnh

- Định lý 2: giả sử G = (V, E) là đồ thị có hướng. Khi đó:

$$\sum_{v \in V} deg^{+}(v) = \sum_{v \in V} deg^{-}(v) = |E|$$



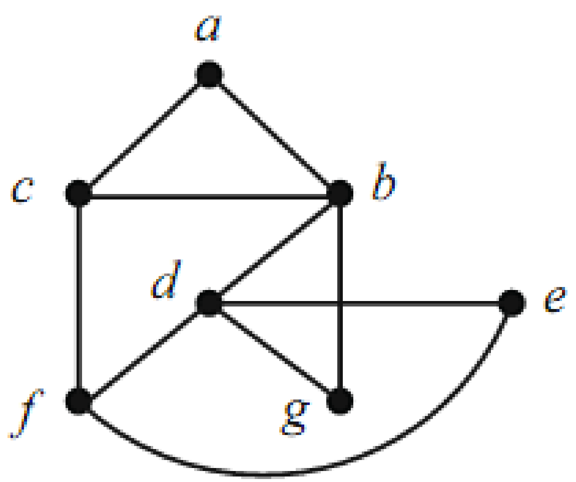
Đường đi

- Định nghĩa: *một đường đi trong đồ thị là một dãy các đỉnh* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ $(x_i \in V)$
  sao cho $(x_i, x_{i+1}) \in E$ $(\forall i = \overline{1, k-1})$

- Là đường đi từ x_1 đến x_k, độ dài của đường đi là k -1
- x_1 và x_k là đỉnh đầu và đỉnh cuối của đường đi
- Đường đi không có đỉnh nào lặp lại là đường đi sơ cấp
- Đường đi không có cạnh lặp lại là đường đi đơn
- Nếu $x_1 \equiv x_k$ thì đường đi gọi là chu trình
- Chu trình không có cạnh nào lặp lại là chu trình đơn

(=> chu trình đơn có độ dài nhỏ nhất = ?)

Ví dụ



- a, b, c, d
- a, b, d, e
- a, b, a, c, f, e
- a, b, c, a
- a, b, a
- a, b, d, g, b, c, a

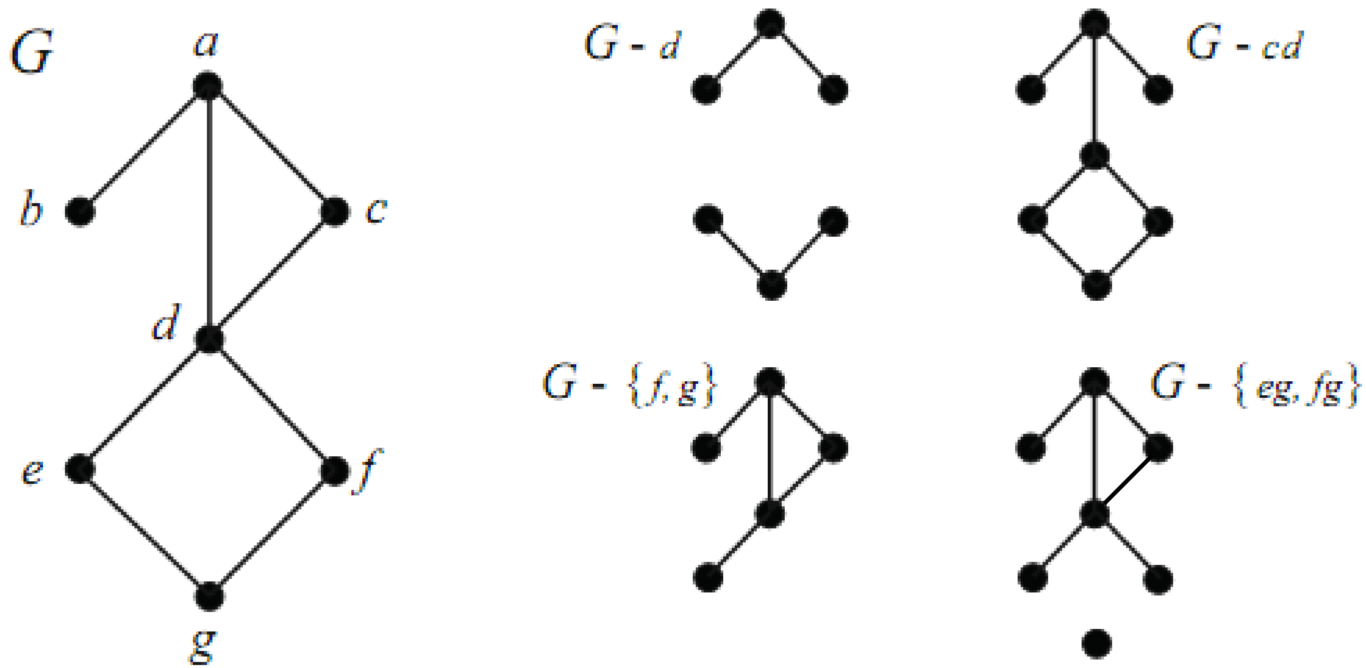
Phép toán xóa đỉnh và xóa cạnh

Cho đồ thị G = (V, E), $v \in V$, $e \in E$, $S \subset V$, $T \subset E$.

- G - v là đồ thị thu được từ G bằng cách bỏ đi đỉnh v và tất cả các cạnh liên quan đến v
- G – S là đồ thị thu được từ G bằng cách bỏ đi các đỉnh có trong S và tất cả các cạnh liên quan.
- G – e là đồ thị thu được từ G, chỉ bỏ đi cạnh e
- G – T là đồ thị thu được từ G, bỏ đi các cạnh trong T

Phép toán xóa đỉnh và xóa cạnh

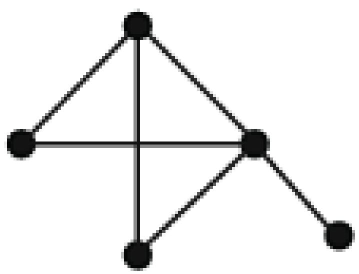
- Ví dụ



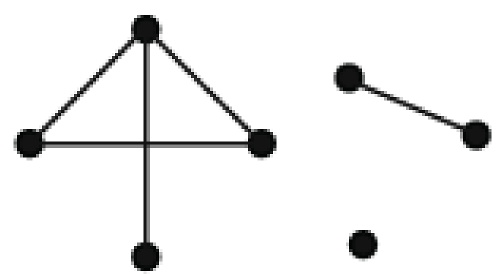
Đồ thị liên thông

- *Định nghĩa: Một đồ thị là liên thông nếu luôn tìm được đường đi giữa 2 cặp đỉnh bất kỳ của đồ thị*

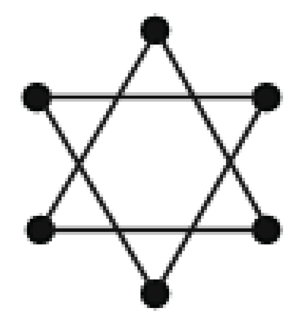
- Ví dụ:



G_1



G_2

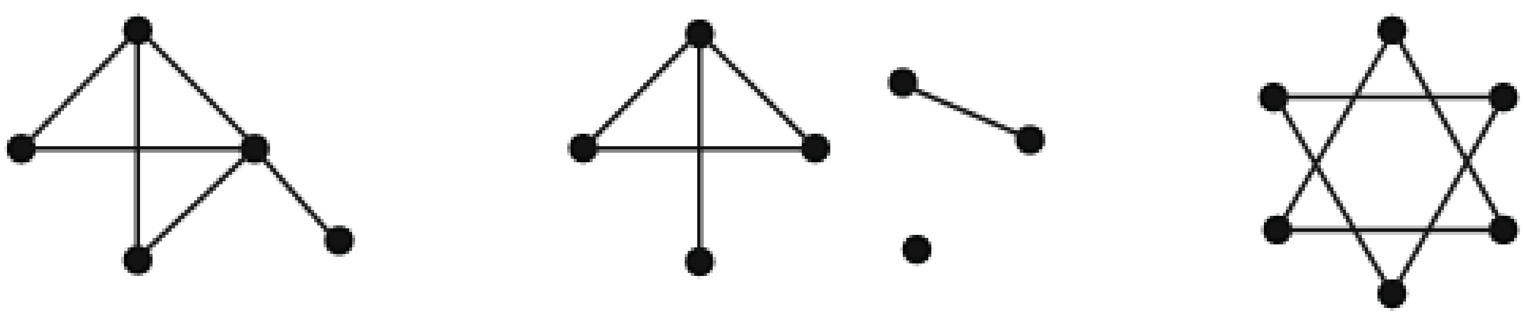


G_3

Thành phần liên thông

Cho đồ thị G = (V, E), đồ thị H = (W, F) là *đồ thị con* *của G nếu* $W \subset V$ *và* $F \subset E$

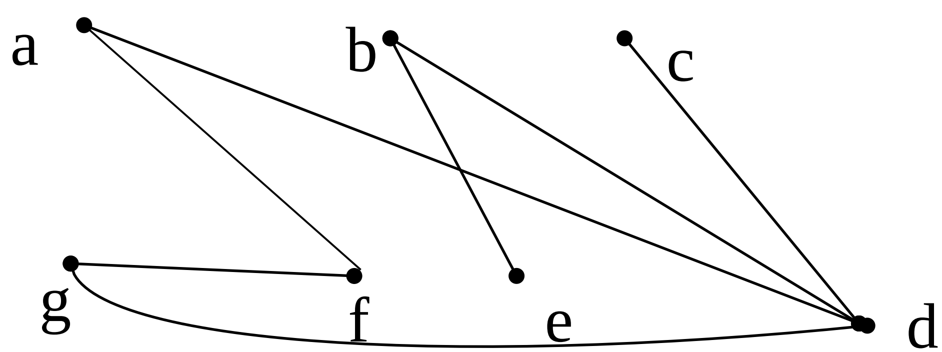
Cho đồ thị G = (V, E) không liên thông. Ta có thể chia G thành các đồ thị con liên thông, đôi một không có đỉnh chung. Các đồ thị con này được gọi là *thành phần liên thông* *của đồ thị G*



G_1 G_2 G_3

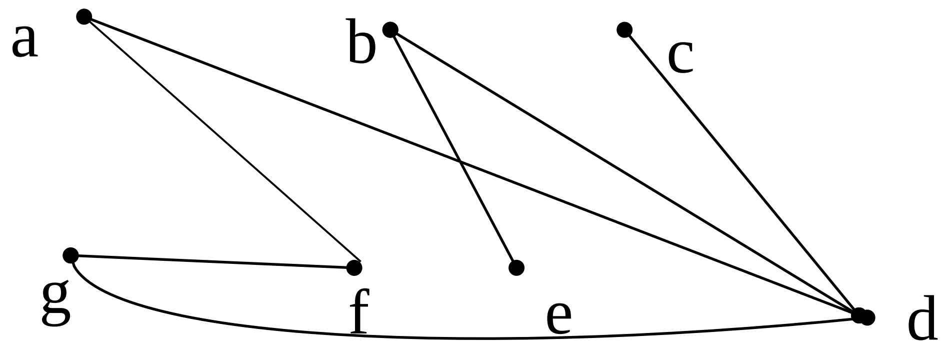
Đỉnh rẽ nhánh, cầu

- *Đỉnh v được gọi là* *đỉnh rẽ nhánh* *nếu việc xóa đỉnh v làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị*
- *Cạnh e được gọi là* *cầu* *nếu việc xóa cạnh e làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị*
- Ví dụ



Đỉnh rẽ nhánh, cầu

- *Đỉnh v được gọi là đỉnh rẽ nhánh nếu việc xóa đỉnh v làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị*
- *Cạnh e được gọi là cầu nếu việc xóa cạnh e làm tăng số thành phần liên thông của đồ thị*
- Ví dụ



Đỉnh rẽ nhánh: b, d

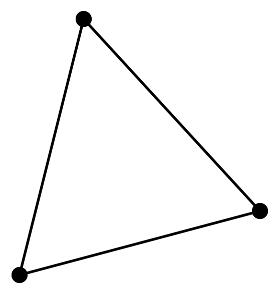
Cạnh cầu: bd, be, cd

Một số dạng đồ thị đặc biệt

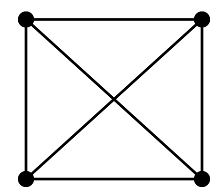
Đồ thị đầy đủ

- Đồ thị đầy đủ - K_n: là đồ thị n đỉnh mà giữa 2 đỉnh bất kỳ đều có cạnh nối
- Ví dụ:

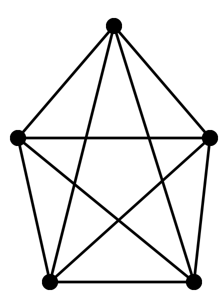
K_2



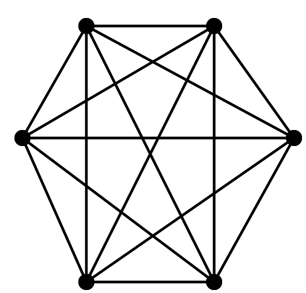
K_3



K_4



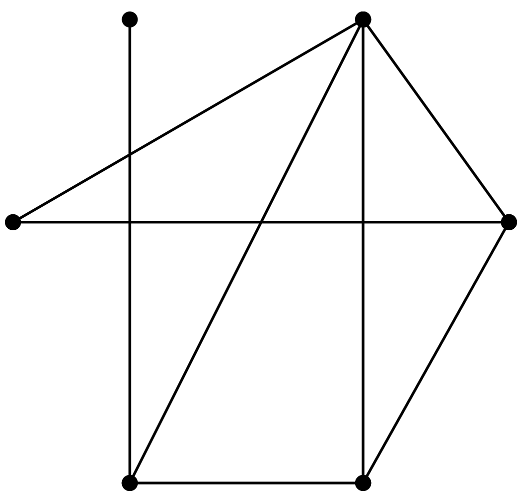
K_5



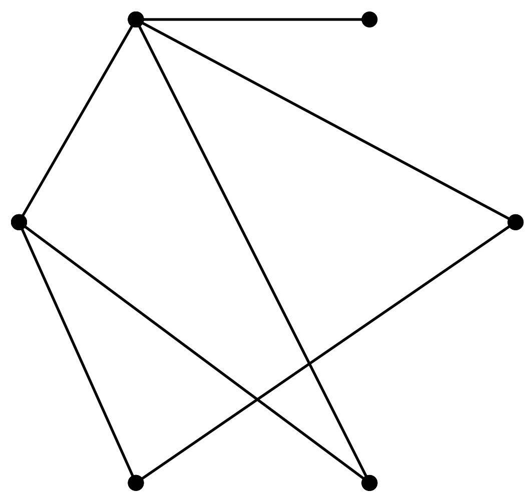
K_6

Đồ thị bù

- Cho trước đồ thị G = (V, E) có n đỉnh, đồ thị bù của G được ký hiệu $\overline{G} = K_n - E$
- Ví dụ:



G

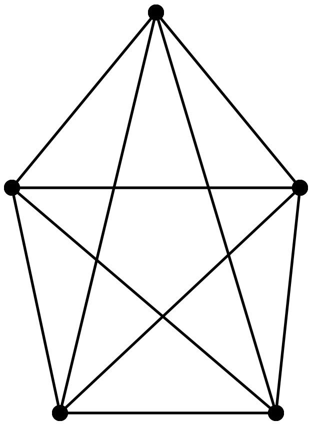


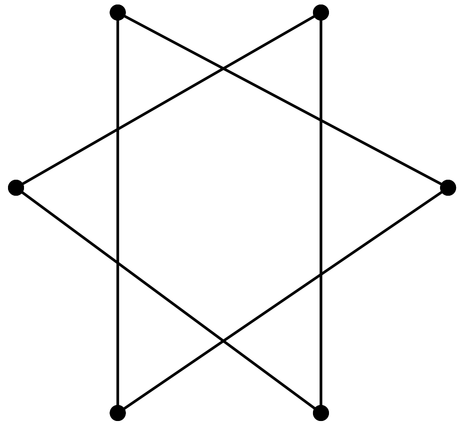
$\overline{G}$

Đồ thị chính quy

- Đồ thị chính quy bậc k là đồ thị có tất cả các đỉnh có bậc bằng k.

- Ví dụ:

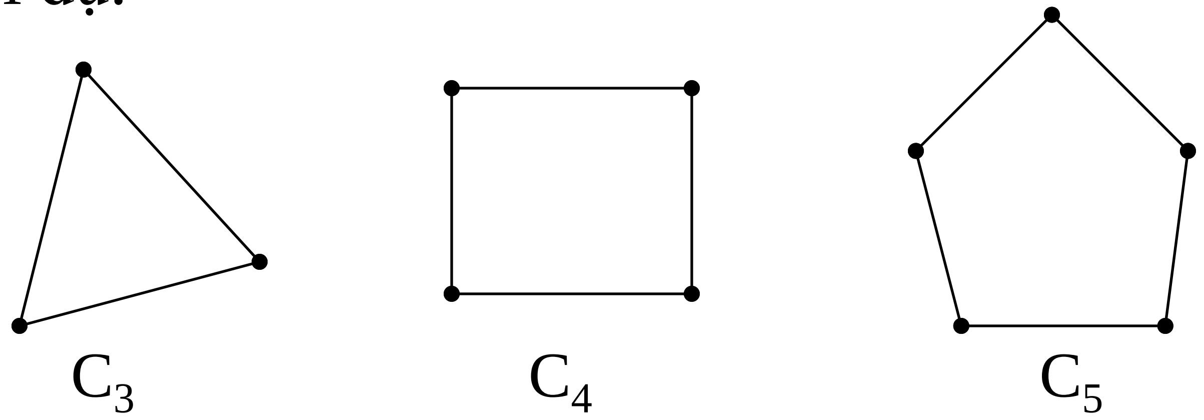




Đồ thị vòng

- Đồ thị vòng - C_n: n đỉnh, n cạnh, các cạnh xếp liên tiếp thành 1 vòng

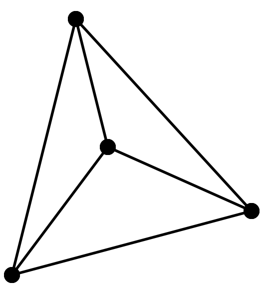
- Ví dụ:



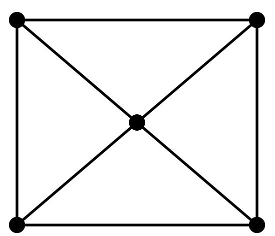
Đồ thị bánh xe

- Đồ thị bánh xe – W_n: có n+1 đỉnh = đồ thị vòng n đỉnh + 1 đỉnh mới, nối với tất cả các đỉnh đã có

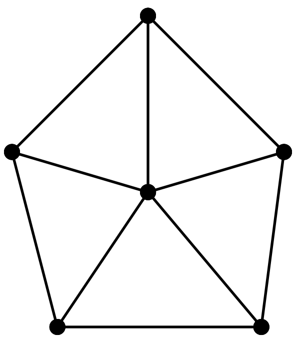
- Ví dụ:



W_3



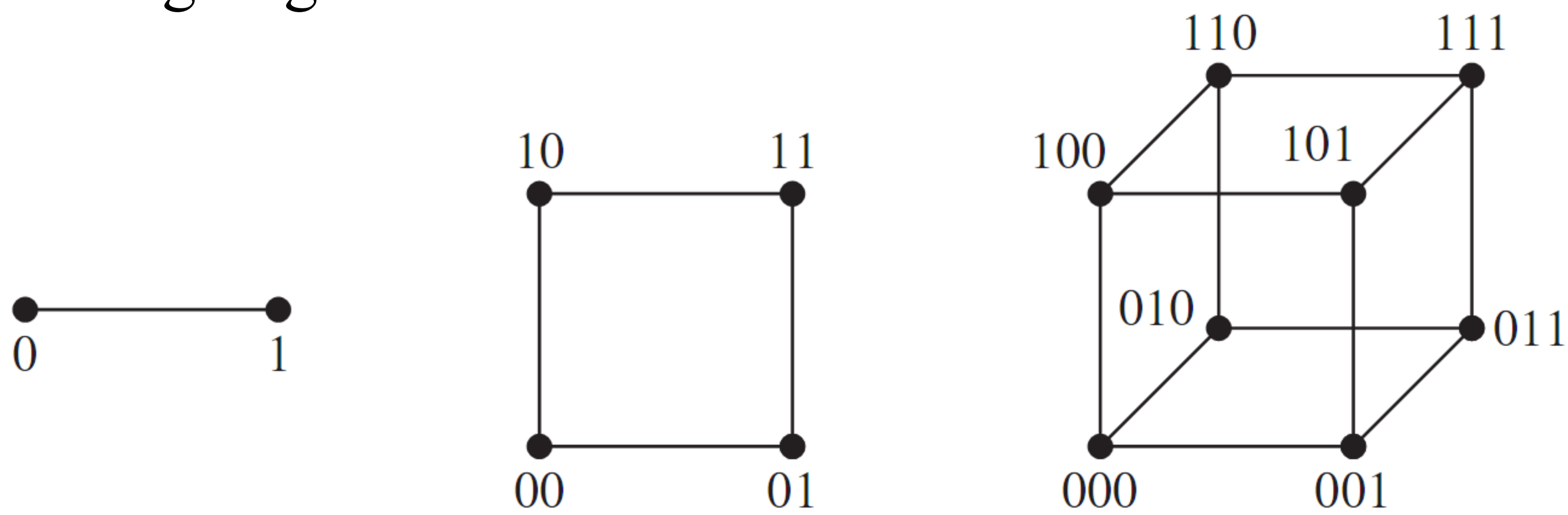
W_4



W_5

Đồ thị lập phương

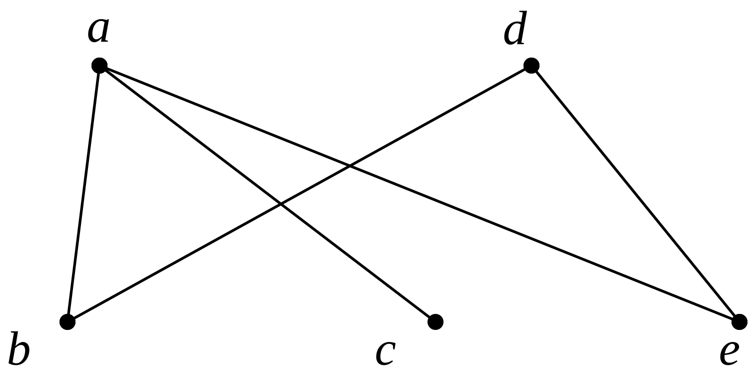
- Đồ thị lập phương (n-cubes/n-dimensional hypercube) – Q_n: gồm 2^n đỉnh, mỗi đỉnh biểu diễn = một xâu nhị phân độ dài n; 2 đỉnh là kề nhau nếu 2 xâu nhị phân tương ứng chỉ khác nhau 1 bit.

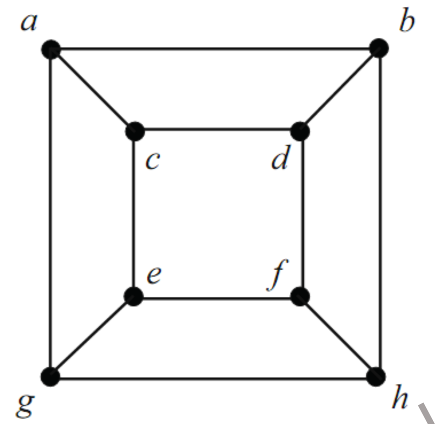


Q_1 Q_2 Q_3

Đồ thị hai phía

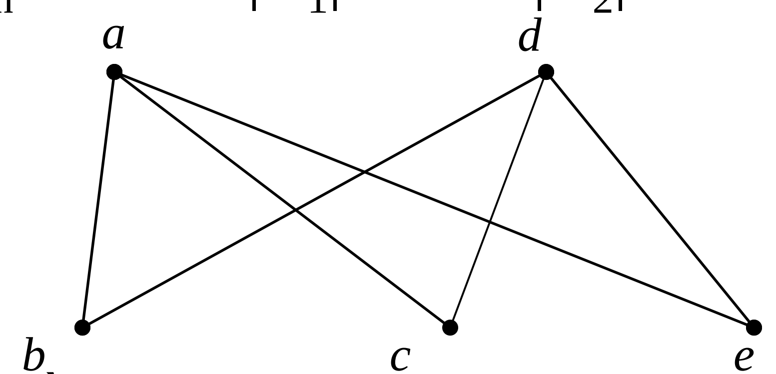
- Đồ thị G = (V, E) là đồ thị hai phía nếu tập đỉnh V có thể chia thành 2 tập V_1 và V_2 không giao nhau sao cho: một cạnh bất kì ∈ E có 1 đầu thuộc $V_{1,}$ 1 đầu thuộc V_2
- Ví dụ:





Đồ thị hai phía đầy đủ

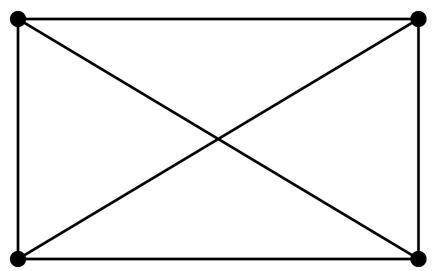
- Đồ thị G = (V, E) là đồ thị 2 phía đầy đủ nếu V có thể được chia thành 2 tập con không giao nhau V_1 và V_2 sao cho:
  - Một cạnh bất kỳ của G có 1 đầu thuộc V_1, 1 đầu thuộc V_2
  - Giữa 2 cặp đỉnh uv bất kỳ | $u \in V_1$, $v \in V_2$ đều có cạnh nối
  - Ký hiệu: $K_{m,n}$ với $m = |V_1|$ và $n = |V_2|$

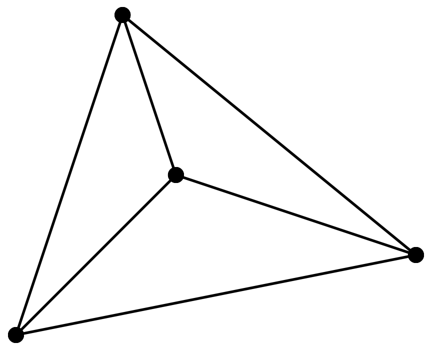


- <u>Định lý 3:</u> Một đồ thị là hai phía khi và chỉ khi trong đồ thị không có chu trình lẻ

Đồ thị đẳng cấu

- Hai đồ thị G và H là đẳng cấu nếu tồn tại một song ánh $f : V(G) \rightarrow V(H)$ sao cho nếu cạnh uv ∈ E(G) thì f(u)f(v) ∈ E(H)
- Ví dụ:





Biểu diễn đồ thị trên máy tính

Ma trận kề, ma trận trọng số

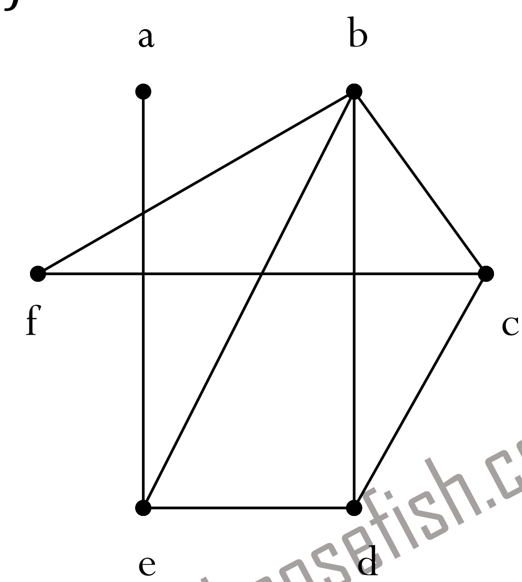
- Xét đồ thị G = (V, E) với tập đỉnh V = $\{v_1, \ldots, v_n\}$

Ma trận kề của đồ thị ma trận A_{nxn} xác định như sau:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ nếu } v_i v_j \notin E \\ 1 \text{ nếu } v_i v_j \in E \end{cases}$$

- Ví dụ:

	a	b	c	d	e	f
a	0	0	0	0	1	0
b	0	0	1	1	1	1
c	0	1	0	1	0	1
d	0	1	1	0	1	0
e	1	1	0	1	0	0
f	0	1	1	0	0	0

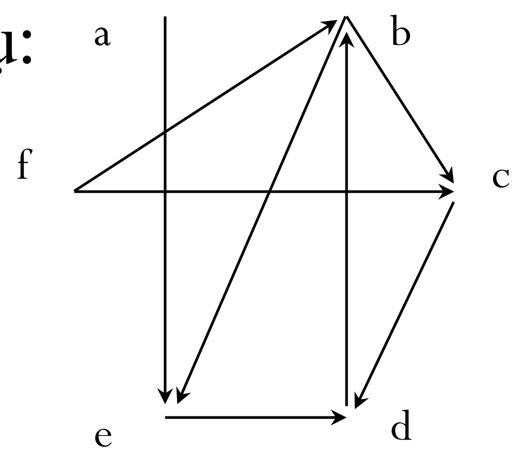


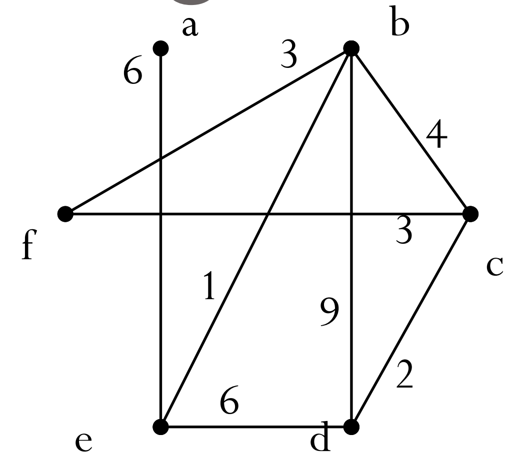
Ma trận kề, ma trận trọng số

- Tính chất của ma trận kề:
  - Đối xứng
  - Tổng các phần tử trên một hàng (cột) bằng bậc của đỉnh tương ứng.
  - Giá trị của phần tử ở dòng i, cột j của ma tận A^m là số đường đi từ đỉnh i đến đỉnh j có độ dài m.
- Ma trận kề của đồ thị có hướng xây dựng tương tự
- Ma trận của đồ thị có trọng số được xây dựng bằng cách thay giá trị 1 bằng trọng số của cạnh tương ứng.

Ma trận kề, ma trận trọng số

- Ví dụ:





	a	b	c	d	e	f
a	0	0	0	0	1	0
b	0	0	1	0	1	0
c	0	0	0	1	0	0
d	0	1	0	0	0	0
e	0	0	0	1	0	0
f	0	1	1	0	0	0

	a	b	c	d	e	f
a	0	0	0	0	6	0
b	0	0	4	9	1	3
c	0	4	0	2	0	3
d	0	9	2	0	6	0
e	6	1	0	6	0	0
f	0	3	3	0	0	0

Ma trận liên thuộc đỉnh – cạnh

- Xét đồ thị có hướng G = (V, E)

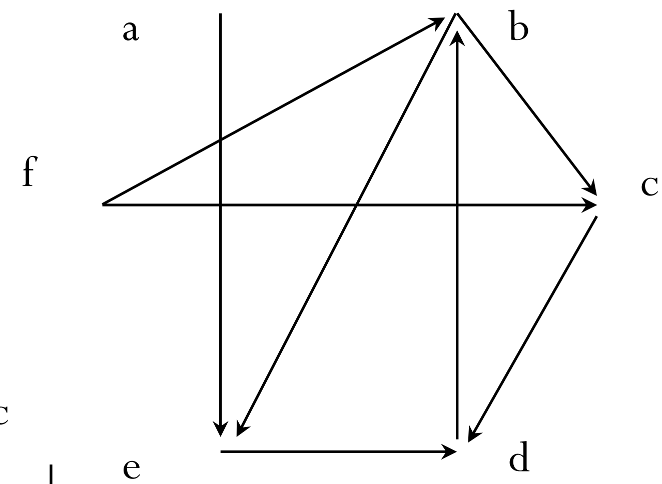
Trong đó: $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$; $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$

Ma trận liên thuộc đỉnh – cạnh A_{nxm} xác định như sau:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ nếu } v_i \text{ là đỉnh đầu của cung } e_j \\ -1 \text{ nếu } v_i \text{ là đỉnh cuối của cung } e_j \\ 0 \text{ nếu } v_i \text{ không thuộc cung } e_j \end{cases}$$

Ma trận liên thuộc đỉnh – cạnh

- Ví dụ



	ae	bc	be	cd	db	ed	fb	fc
a	1	0	0	0	0	0	0	0
b	0	1	1	0	-1	0	-1	0
c	0	-1	0	1	0	0	0	-1
d	0	0	0	-1	1	-1	0	0
e	-1	0	-1	0	0	1	0	0
f	0	0	0	0	0	0	1	1

Danh sách cạnh (cung)

- Xét đồ thị G = (V, E)

  Trong đó $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$; $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$; $e_i = v_{i1}v_{i2}$

  Các cạnh của đồ thị được lưu thành 2 dãy, 1 dãy chứa đỉnh đầu, 1 dãy chứa đỉnh cuối của cạnh tương ứng

  $Dau[i] = v_{i1}$; $Cuoi[i] = v_{i2}$
- Thường sử dụng khi đồ thị là *đồ thị thưa* ($m < 6n$)

Danh sách kề

- Xét đồ thị G = (V, E) trong đó V = {v_1, …, v_n}
  Với mỗi đỉnh v của đồ thị, ta lưu danh sách của tất cả các đỉnh kề với v trong một danh sách, ký hiệu: ke(v)
- Ví dụ

  Ke(a) = {e}

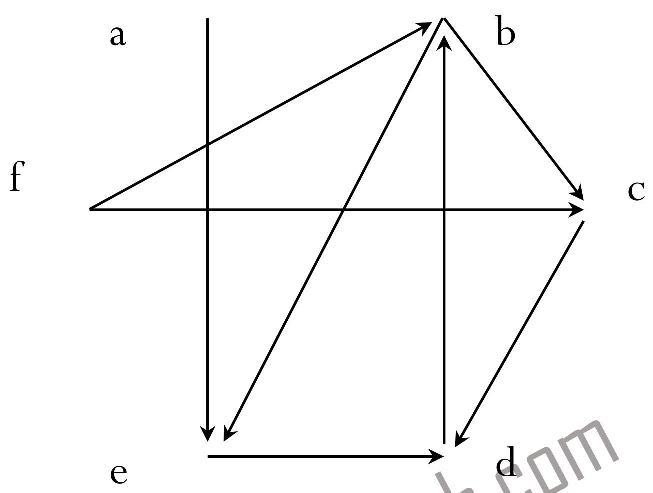
  Ke(b) = {c, e}

  Ke(c) = {d}

  Ke(d) = {b}

  Ke(e) = {d}

  Ke(f) = {b, c}



Bài tập

1. Tự vẽ ra 2 đồ thị, 1 có hướng, 1 vô hướng, mỗi đồ thị có n > 5 đỉnh, ≥ n cạnh

   Biểu diễn các đồ thị vừa vẽ bằng tất cả các cách có thể.

2. Vẽ một đồ thị liên thông ≤ 10 đỉnh có ít nhất 1 chu trình đơn ứng với mỗi độ dài từ 5 đến 9 nhưng không chứa chu trình đơn có độ dài khác.