

Tập hợp - quan hệ - ánh xạ

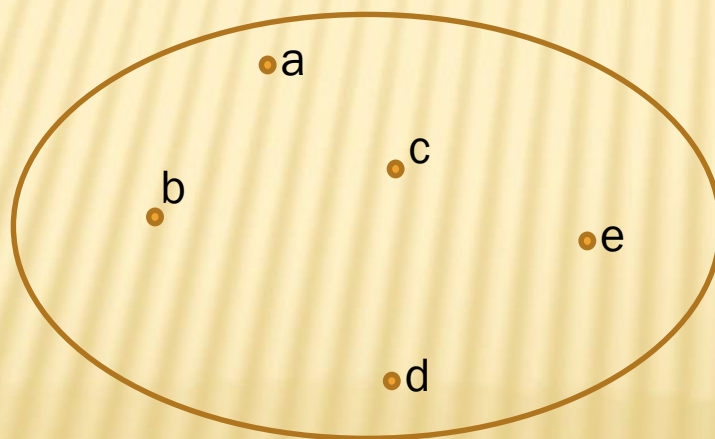
TOÁN RỜI RẠC

TẬP HỢP

- ✕ Các khái niệm cơ bản
- ✕ Phép toán

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

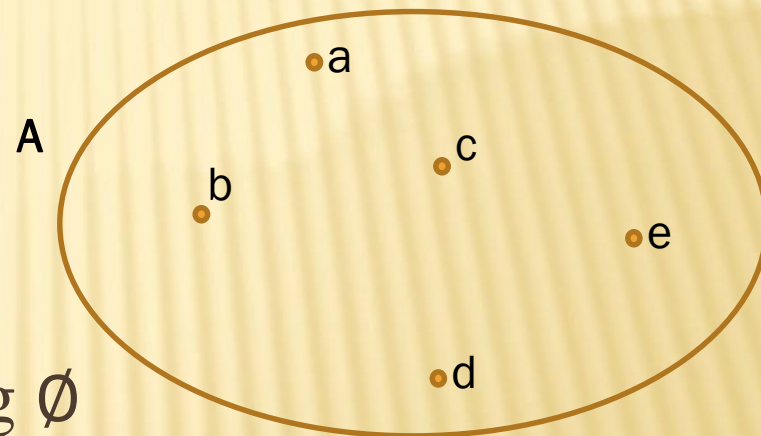
- ✗ Tập hợp là một bộ không có thứ tự các đối tượng
 - + Tập hợp học sinh trong lớp, tập hợp chữ cái tiếng Việt
- ✗ Các đối tượng trong một tập hợp gọi là phần tử



CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

✕ Ký hiệu:

- + Tập hợp: chữ cái in hoa A, B, C, ...
- + Phần tử: chữ cái thường a, b, c, ...
- + Tập hợp không chứa phần tử nào: tập rỗng $\emptyset$
- + Phần tử thuộc tập hợp: $\in$



CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

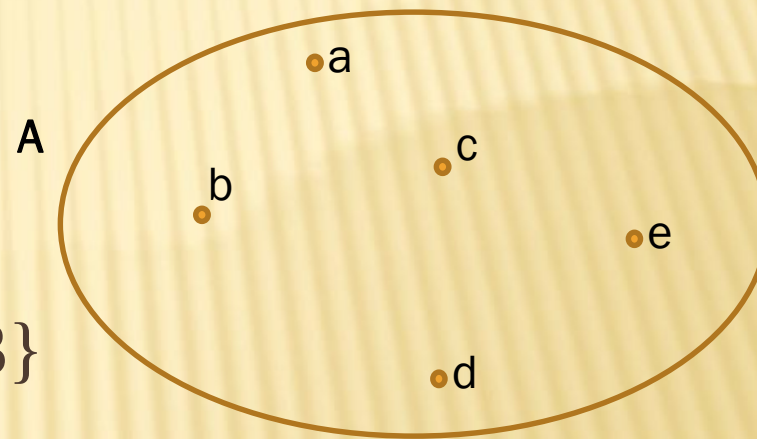
✗ Các cách biểu diễn:

+ Liệt kê: $A = \{a, b, c, d, e\}$

+ Chỉ ra tính chất tổng quát: $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

+ Biểu đồ Venn

+ Trên máy tính: Xây dựng biểu diễn khả năng xuất hiện của các phần tử trong một tập vũ trụ



CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

- ✖ Hai tập hợp bằng nhau $A = B$ khi và chỉ khi chúng có cùng các phần tử
 - + $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$
 - + $\{a, a, b, c\} = \{b, b, c, a\}$
- ✖ Tập con: tập hợp A được gọi là tập con của tập hợp B khi và chỉ khi mọi phần tử thuộc tập A thì cũng là phần tử của tập B.
 - + Ký hiệu: $A \subset B$
 - + $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$
- ✖ Lực lượng của tập hợp là số phần tử phân biệt của tập hợp
 - + Ký hiệu: $N(A)$ hoặc $|A|$

CÁC PHÉP TOÁN

Cho trước hai tập hợp: A và B

✖ Phép hợp: $\cup$

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

✖ Phép giao: $\cap$

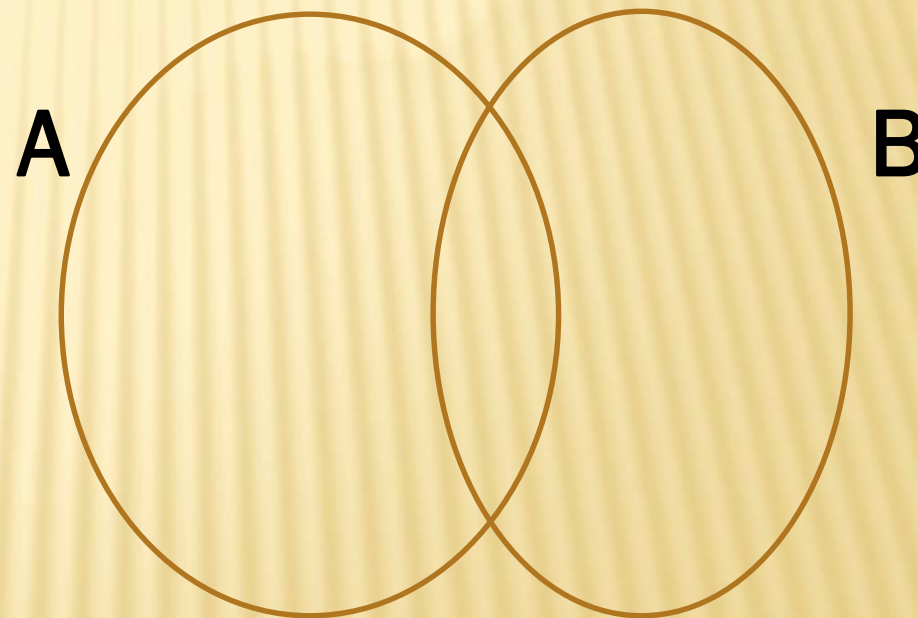
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

✖ Phép trừ: $-$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

✖ Phép bù: $\bar{}$

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$$



CÁC PHÉP TOÁN

Cho trước hai tập hợp: A và B

✖ Tích Đề-các: x

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Ví dụ:

$$A = \{1, 2, 4\}$$

$$B = \{\text{xanh}, 2, \text{đỏ}\}$$

$$A \times B = \{ (1, \text{xanh}); (1, 2); (1, \text{đỏ}); (2, \text{xanh}); (2, 2); (2, \text{đỏ}); \\ (4, \text{xanh}); (4, 2); (4, \text{đỏ}) \}$$

TÍNH CHẤT

✖ Luật giao hoán:

$$A \cup B = B \cup A ; A \cap B = B \cap A$$

✖ Luật kết hợp:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C ; A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

✖ Luật phân phối:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

✖ Luật đối ngẫu:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} ; \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

MỘT SỐ TẬP HỢP BẰNG NHAU

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cap \Omega = A$$

$$A \cup \Omega = \Omega$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

$$A \cup \overline{A} = \Omega$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

BÀI TẬP

Cho biết trong các hệ thức dưới đây, hệ thức nào đúng, hệ thức nào sai

a) $A \subset A \cap B$

b) $C \subset (A \cap B) \cup C$

c) $A \cup B \subset A \cap B$

d) $A \cap (B \cup A) = A \cap B$

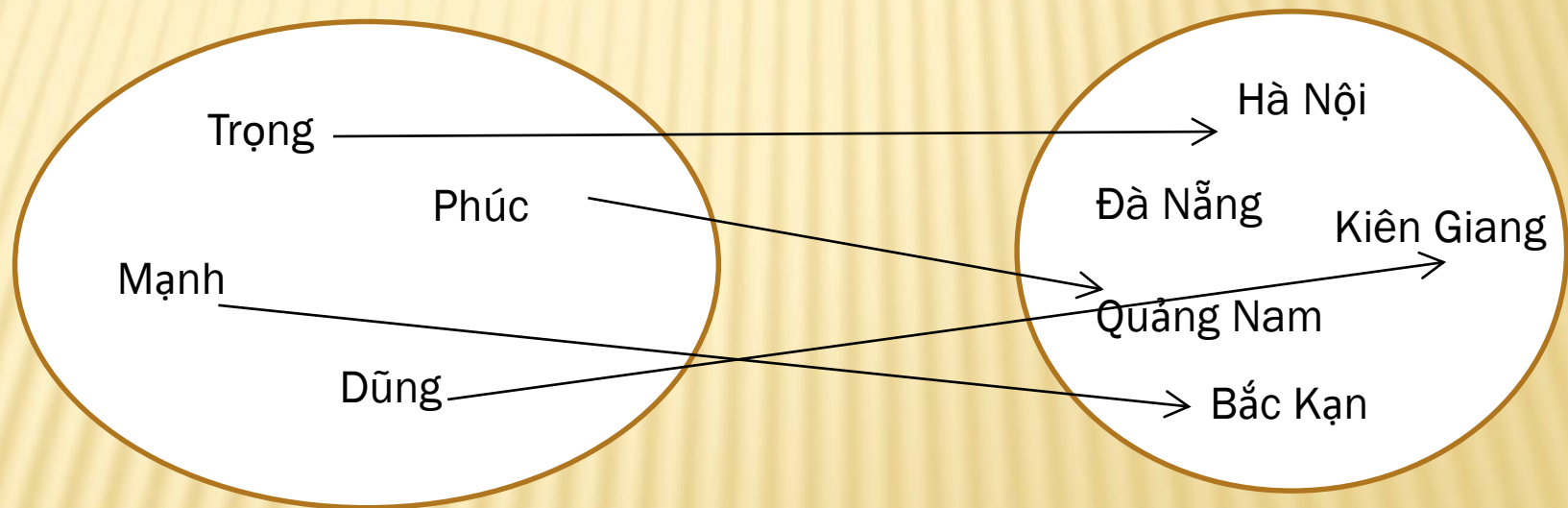
e) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = A \setminus B$

QUAN HỆ

- ✕ Quan hệ hai ngôi
- ✕ Tính chất
- ✕ Quan hệ tương đương
- ✕ Phân hoạch

QUAN HỆ HAI NGÔI

- ✗ $R \subset A \times B$ là một quan hệ hai ngôi từ A đến B.
 - + Hai phần tử a, b thỏa mãn $(a, b) \in R$ được gọi là có quan hệ R với nhau
 - + Ký hiệu aRb
 - + Ví dụ:



- ✗ $R \subset A \times A$ là một quan hệ hai ngôi trên tập A

TÍNH CHẤT

Một quan hệ hai ngôi R trên tập A được gọi là có tính chất:

- ✖ Phản xạ: nếu $(x, x) \in R \quad \forall x \in A$
- ✖ Đối xứng: nếu $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
- ✖ Phản đối xứng: nếu $\begin{cases} (x, y) \in R \\ (y, x) \in R \end{cases} \Rightarrow x = y$
- ✖ Truyền ứng: nếu $\begin{cases} (x, y) \in R \\ (y, z) \in R \end{cases} \Rightarrow (x, z) \in R$

VÍ DỤ

Xét quan hệ hai ngôi trên N sau có tính chất nào

1. $R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$
2. $R_2 = \{(a, b) \mid a = b\}$
3. $R_3 = \{(a, b) \mid a < b\}$
4. $R_4 = \{(a, b) \mid a + b = 2\}$
5. $R_5 = \{(a, b) \mid \exists k \in Z ; a = k*b\}$

Tự nghĩ một quan hệ hai ngôi và xác định tính chất nếu có

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

- ✗ Định nghĩa: Quan hệ tương đương là một quan hệ hai ngôi có cả ba tính chất: **phản xạ, đối xứng và truyền ứng**
- ✗ Ví dụ:
 - + aRb nếu $a = b$
 - + Quan hệ đồng hương
 - + aRb nếu $a - b \in \mathbb{Z}$
 - + ...

LỚP TƯƠNG ĐƯƠNG

Cho R là một quan hệ tương đương trên A ; phần tử $a \in A$.

✖ Định nghĩa: Lớp tương đương chứa a là tập chứa tất cả các phần tử có quan hệ R với a

✖ Ký hiệu $[a]_R$ hoặc $[a]$

$$[a]_R = [a] = \{b \in A \mid aRb\}$$

✖ Ví dụ:

$$aRb \text{ nếu } (a - b) : 2 \Rightarrow [1]_R = ? \quad [10]_R = ?$$

LỚP TƯƠNG ĐƯƠNG

✗ Các lớp tương đương có tính chất: **phủ kín** tập hợp đã cho (một phần tử bất kỳ phải thuộc vào một lớp nào đó) và **rời nhau** (không có phần tử nào thuộc hai lớp)

✗ Định lý: Cho R là quan hệ tương đương trên A ; $a, b \in A$

Các mệnh đề sau là tương đương:

+ aRb

+ $[a] = [b]$

+ $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

PHÂN HOẠCH

- ✗ Một phân hoạch của một tập A là một tập các tập con khác rỗng, không giao nhau của A và hợp của chúng là tập A

$\{A_i\}$ là phân hoạch của A nếu:

$$+ A_i \neq \emptyset \forall i$$

$$+ A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$$

$$+ \bigcup_i A_i = A$$

- ✗ Ví dụ: $A = \{1, 2, 3\}$ có bao nhiêu phân hoạch?

PHÂN HOẠCH

✖ Định lý:

Nếu R là một quan hệ tương đương trên A thì các lớp tương đương của R là một phân hoạch của A

Ngược lại, cho trước một phân hoạch của A , tồn tại một quan hệ tương đương nhận các tập trong phân hoạch trên là một lớp tương đương của quan hệ đó.

BÀI TẬP

Cho $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ và quan hệ R xác định trên A bởi:

$$R = \{(0, 0), (2, 1), (0, 3), (1, 4), (4, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (4, 2)\}$$

Xét xem R có là quan hệ tương đương không?

Nếu R là quan hệ tương đương, đưa ra phân hoạch của A thành các lớp tương đương theo quan hệ R

ÁNH XẠ

- ✕ Các khái niệm cơ bản
- ✕ Một số loại ánh xạ

ĐỊNH NGHĨA

- ✖ Cho $X, Y \neq \emptyset$. Ánh xạ f từ X vào Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một và chỉ một phần tử $y \in Y$
- ✖ Ký hiệu:

$$f: X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

+ X : Tập nguồn, Y : Tập đích

+ $y = f(x)$ được gọi là ảnh của x qua ánh xạ f

- ✖ Ví dụ: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 2 + x$

ẢNH VÀ NGHỊCH ẢNH

Cho ánh xạ: $f: X \rightarrow Y; x \mapsto y = f(x); A \subset X; B \subset Y$

✖ Ảnh của tập A : $f(A)$

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\} = \{y \in Y | \exists x \in X; f(x) = y\}$$

Ví dụ: $f(x) = x^2 + 3; f([-3, 4]) = ?$

✖ Nghịch ảnh của tập B : $f^{-1}(B)$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

Ví dụ: $f(x) = x^2 + 3; f^{-1}([-3, 4]) = ?$

ĐƠN ÁNH, SONG ÁNH, TOÀN ÁNH

Cho ánh xạ $f: X \rightarrow Y$

✖ Đơn ánh: $\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

$$\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\Leftrightarrow f(x) = y \text{ luôn có không quá một nghiệm}$$

✖ Toàn ánh: $f(X) = Y \Leftrightarrow f(x) = y$ luôn có nghiệm

✖ Song ánh = đơn ánh + toàn ánh

✖ Ví dụ: $f(x) = (2x^2 + 5x - 2)/(x^2 + 1) \quad (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$

TÍCH ÁNH XẠ

Cho hai ánh xạ: $f: X \rightarrow Y$; $g: Y \rightarrow Z$

- ✖ Ánh xạ $h: X \rightarrow Z$ xác định bởi: $h(x) = g(f(x))$ với $x \in X$ gọi là ánh xạ tích của f và g .

Kí hiệu: $g \circ f$

- ✖ Ví dụ: $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 2x + 3$$

$$g(x) = x^2 + 4$$

Xác định $f \circ g$ và $g \circ f$

ÁNH XẠ NGƯỢC

- ✖ Cho song ánh $f: X \rightarrow Y$. Khi đó, với mỗi $y \in Y$, tồn tại duy nhất một giá trị $x \in X$ sao cho $f(x) = y$ hay $f^{-1}(y) = x$

Như vậy, ta có ánh xạ:

$$f^{-1}: Y \rightarrow X$$

$$y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

Ánh xạ này gọi là ánh xạ ngược của ánh xạ f .

- ✖ Ví dụ: $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f(x) = 2x + 3$; $g(x) = x^2 + 4$

Tìm ánh xạ ngược của f, g (nếu có)

BÀI TẬP

Cho ánh xạ $f : R \rightarrow R, f(x) = x^3 + 1$.

- a. Xác định xem f có là toàn ánh?
- b. Xác định tính ánh xạ của f và f
- c. Tìm ánh xạ ngược nếu có của f