Bài toán tối ưu

TOÁN RỜI RẠC

NỘI DUNG

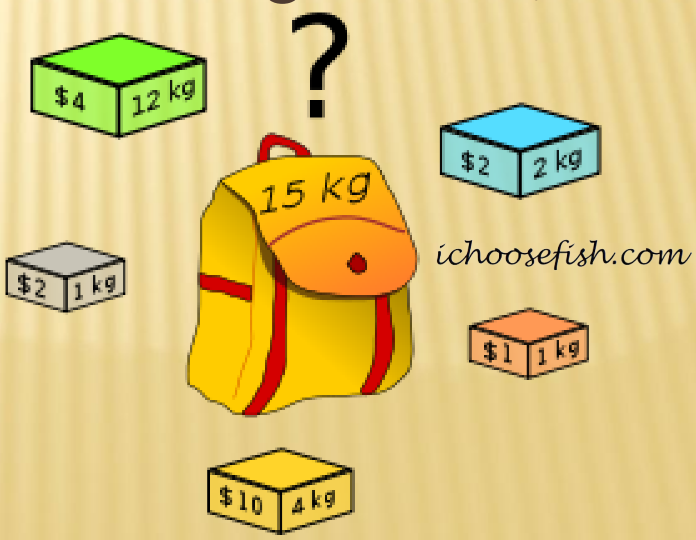
- Giới thiệu
- Kỹ thuật nhánh cận
- Kỹ thuật nhánh cận giải bài toán người bán hàng

GIỚI THIỆU

- Bài toán tối ưu: Là bài toán tìm ra tổ hợp tốt nhất trong những tổ hợp có thể tạo ra, thỏa mãn yêu cầu cho trước.
- Tối ưu tổ hợp có rất nhiều ứng dụng trong thực tế.

MỘT SỐ BÀI TOÁN TỐI ƯU

- *Xếp ba lô* (1): có 1 chiếc ba lô, mang được không quá trọng lượng b. Có n đồ vật với trọng lượng: $a_1, \ldots, a_n$ và giá trị $c_1, \ldots, c_n$ tương ứng. Hỏi ta xếp vào ba lô những vật nào để mang được giá trị lớn nhất?
- *Xếp ba lô* (2): tương tự như bài 1 nhưng mỗi loại đồ vật có thể mang theo từ 0->m lần



MỘT SỐ BÀI TOÁN TỐI ƯU

- *Bài toán người bán hàng*:
  - 1 người bán hàng cần giao hàng đến n điểm: T_1, …, T_n.
  - Đường đi: Xuất phát từ một địa điểm T_i, đi qua tất cả các điểm còn lại, mỗi nơi đi qua đúng 1 lần rồi quay trở lại vị trí xuất phát.
  - Biết C_{ij} là chi phí đi từ địa điểm T_i đến T_j .
  - Yêu cầu: Hãy tìm một hành trình thỏa mãn yêu cầu có tổng chi phí nhỏ nhất.

MỘT SỐ BÀI TOÁN TỐI ƯU

- *Bài toán phân công:* Có n công việc và n thợ. C_{ij} là chi phí để trả cho thợ i làm công việc j. Hãy tìm cách thuê thợ sao cho tổng chi phí là nhỏ nhất. Lưu ý: mỗi thợ chỉ làm 1 việc và 1 việc chỉ làm bởi 1 thợ.

MỘT SỐ BÀI TOÁN TỐI ƯU

- *Bài toán trả tiền ATM*: Khách hàng yêu cầu rút số tiền n. Trong cây ATM có các loại tiền với mệnh giá: $a_1, \ldots, a_m$. Tính xem cây phải trả tiền như thế nào để số tờ tiền là ít nhất?

ichoosefish.com

BÀI TOÁN

Dạng tổng quát của bài toán tối ưu:

- Cho tập hữu hạn phần tử D
- Hàm mục tiêu f(X) xác định trên D
- Mỗi phần tử X ∈ D có dạng $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ được gọi là 1 phương án
- Yêu cầu: *Tìm phương án X_0 sao cho $f(X_0)$ đạt cực đại (cực tiểu) trên D.*

Phương án X_0 được gọi là phương án tối ưu.

VÍ DỤ

Bài toán xếp ba lô 1 (mỗi đồ vật chọn không quá 1 lần):

- Tập phương án (D): Tập các bộ n phần tử (x_1, …, x_n) trong đó x_i = 0 nếu không chọn vật thứ i và = 1 nếu chọn.
- Hàm mục tiêu (f) : Tổng giá trị các đồ vật xếp được:

$$\mathrm{f}(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i c_i$$

- Điều kiện: Tổng khối lượng không quá b:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_i \le b$$

- Yêu cầu: Tìm phương án thỏa mãn điều kiện và làm hàm mục tiêu đạt cực đại

KỸ THUẬT NHÁNH CẬN

KỸ THUẬT NHÁNH CẬN

- Kỹ thuật nhánh cận phát triển từ ý tưởng của thuật toán quay lui.
- Thay vì duyệt tất cả các trường hợp, nếu ta đến một vị trí mà giá trị của hàm mục tiêu tại đó và các điểm về sau chắc chắn không tốt nhất thì quay lại luôn

TƯ TƯỞNG CỦA KỸ THUẬT NHÁNH CẬN

Xét bài toán:

Tìm min {f(x) | x ∈ D}

D = {x = (x_1, …, x_n) ∈ A_1× … × A_n; x thỏa mãn t/c P}

- Một bộ (a_1, …, a_k) là phương án bộ phận cấp k
- Giả sử tồn tại hàm g thỏa mãn:

$$g(a_1, \ldots, a_k) \le \min\ \{f(x) \mid x \in D, x_i = a_i\ , i = \overline{1,k}\}$$

Khi đó giá trị hàm g tại phương án bộ phận ≤ min của hàm mục tiêu trên nhánh đó.

Hay g là hàm cận dưới, giá trị g(a_1, …, a_k) là cận dưới của nhánh chứa phương án bộ phận (a_1, …, a_k)

TƯ TƯỞNG CỦA KỸ THUẬT NHÁNH CẬN

- Giả sử đã có hàm g.
- Trong quá trình thực hiện thuật toán quay lui, ta gọi:

  + $\bar{x}$ là phương án tốt nhất đã tìm được

  + $\bar{f} = f(\bar{x})$ là kỷ lục

  + Nếu tại bước k, ta có phương án bộ phận $(a_1, \ldots, a_k)$ mà

  $g(a_1, a_2, \ldots, a_k) > \bar{f}$

  => tập con của D chứa các phương án mở rộng của $(a_1, \ldots, a_k)$ sẽ không phải là kết quả tốt nhất => quay lui

KỸ THUẬT NHÁNH CẬN

Ta sửa thuật toán quay lui như sau:

procedure Try(k: integer);

begin

  for (mọi giá trị có thể gán cho) **do**

    if <chấp nhận a_k> **then**

    begin

      $x_k := a_k$;

      if k = n **then** <cập nhật kỷ lục>

      else

      if $g(a_1, a_2, \ldots, a_k) \leq \bar{f}$ **then** Try(k+1)

    end;

end;

KỸ THUẬT NHÁNH CẬN

Để bắt đầu, ta sẽ đặt kỷ lục là giá trị rất lớn.

Thuật toán nhánh cận được thực hiện nhờ thủ tục:

procedure nhanh_can;

begin

$\bar{f} = +\infty$;

Try(1);

if $\bar{f} < +\infty$ **then** $\bar{f}$ là giá trị tối ưu, $\bar{x}$ là phương án tối ưu>

else <bài toán không có kết quả>;

end;

VẤN ĐỀ

Xác định hàm g????

- Tính giá trị của g phải đơn giản hơn việc tìm phương án tối ưu trong nhánh
- Kết quả của hàm g phải gần với kết quả tối ưu của nhánh

VÍ DỤ 1 – BÀI TOÁN XẾP BA LÔ 2

- *Ba lô cỡ b, đồ vật khối lượng: a_1, …, a_n, giá trị c_1, …, c_n. Xếp vào ba lô | giá trị max, số lượng mỗi loại tùy ý*
- Giả sử các đồ vật đã được xếp thứ tự theo "giá trị riêng" giảm dần: $c_1/a_1 \geq c_2/a_2 \geq \ldots \geq c_n/a_n$
- Xét phương án bộ phận (x_1, …, x_k) (x_i là số đồ vật thứ i)
- Ký hiệu:
  - Giá trị ba lô hiện tại: $\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i$
  - Khối lượng còn chứa được: $b_k = b - a_1x_1 - \ldots - a_kx_k$
- Cận trên cho phương án bộ phận (x_1, …, x_k) là:

$$g(x_1, \ldots, x_k) = \sigma_k + b_k.{}^{c_{k+1}}/_{a_{k+1}}$$

ichoosefish.com

VÍ DỤ 1

- Giải bài toán xếp ba lô:

$f(x) = 9x_1 + 6x_2 + 2\,x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 5$

$x_i \in Z$

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i$$

$b_k = b - a_1x_1 - \dots - a_kx_k$

$$g(x_1, \dots, x_k) = \sigma_k + {}^{c_{k+1}b_k}/_{a_{k+1}}$$

VÍ DỤ 1

- Giải bài toán xếp ba lô:

$f(x) = 9x_1 + 6x_2 + 2\,x_3 + 3x_4 \rightarrow \max$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 5$

$x_i \in Z$

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i$$

$b_k = b - a_1x_1 - \ldots - a_kx_k$

$$g(x_1, \ldots, x_k) = \sigma_k + {}^{c_{k+1} b_k}/_{a_{k+1}}$$

Kết quả: 20 – (2, 0, 1, 0)

VÍ DỤ 2 – BÀI TOÁN NGƯỜI BÁN HÀNG

- *n địa điểm, chi phí từ i sang j là c_{ij}. Bắt đầu từ 1 điểm, đi một vòng qua tất cả các điểm và quay về vị trí bắt đầu. Tìm đường | chi phí min*
- Nhận xét:
  - Mỗi cách đi ~ 1 hoán vị từ 1 đến n.
  - Đi vòng tròn => cố định 1 địa điểm làm vị trí xuất phát (T_1)
- Kí hiệu:
  - Phương án bộ phận (u_1, u_2, …, u_k) (u_1 = 1)
  - c_{min} = min {$c_{ij,}$ i, j = 1, …, n, i ≠ j}
  - Chi phí cho hành trình bộ phận: $\sigma = \sum_{i=1}^{k-1} c_{u_i u_{i+1}}$
- Hàm cận dưới cho phương án bộ phận:

$$g(u_1, u_2, \dots, u_k) = \sigma + (n - k + 1)c_{min}$$

VÍ DỤ 2 – BÀI TOÁN NGƯỜI BÁN HÀNG

- Ví dụ: giải bài toán người bán hàng với ma trận chi phí như sau:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 5 & 9 \\ 5 & 10 & 0 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 8 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$c_{min} = \min \{c_{ij,}\ i, j = 1, \ldots, n, i \neq j\}$

$$\sigma = c_{1u_2} + \sum_{i=2}^{k-1} c_{u_i u_{i+1}}$$

$$g(1, u_2, \ldots, u_k) = \sigma + (n - k + 1)c_{min}$$

VÍ DỤ 2 – BÀI TOÁN NGƯỜI BÁN HÀNG

- Ví dụ: giải bài toán người bán hàng với ma trận chi phí như sau:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 & 5 & 4 \\ 4 & 0 & 2 & 5 & 9 \\ 5 & 10 & 0 & 7 & 3 \\ 2 & 6 & 8 & 0 & 5 \\ 5 & 7 & 9 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$c_{min} = \min \{c_{ij,}\ i, j = 1, \ldots, n, i \neq j\}$

$$\sigma = c_{1u_2} + \sum_{i=2}^{k-1} c_{u_i u_{i+1}}$$

$$g(1, u_2, \ldots, u_k) = \sigma + (n - k + 1)c_{min}$$

Kết quả:
Hành trình (1, 2, 3, 5, 4)
Chi phí: 13

BÀI TẬP

- Bài 1, 2 trang 143

KT NHÁNH CẬN GIẢI BÀI TOÁN NGƯỜI BÁN HÀNG

- Vấn đề:
  - Phân nhánh thế nào?
  - Tìm hàm cận dưới thế nào?

KT NHÁNH CẬN GIẢI BÀI TOÁN NGƯỜI BÁN HÀNG

- Bài toán:

$C = [c_{ij}]$ – c_{ij} là chi phí đi từ điểm i đến điểm j

x_{ij} = 1 nếu đi từ i đến j, = 0 nếu không đi từ i đến j

Cần tìm x_{ij} thỏa mãn:

$$min\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$$

KT NHÁNH CẬN GIẢI BÀI TOÁN NGƯỜI BÁN HÀNG

- Tập tất cả các phương án (S_0) sẽ được chia thành các tập rời nhau S_1, S_2, …
- Tập con nào có cận dưới nhỏ nhất sẽ được lựa chọn để phân chia tiếp
- Khi một tập con nào đó chỉ có 1 phương án duy nhất => tính được chi phí của phương án này.
- Sử dụng kết quả tính được để đối chiếu, cập nhật cho **giá trị kỷ lục**
- Tập con nào có cận dưới lớn hơn hoặc bằng **kỷ lục** sẽ bị loại

XÁC ĐỊNH CẬN DƯỚI

- Trên ma trận chi phí, mỗi hàng, mỗi cột đều có 1 và chỉ 1 giá trị được chọn.
- Nếu bớt ở tất cả các phần tử của 1 hàng (cột) giá trị a thì chi phí của tất cả các đường đi đều giảm đi a
- Rút gọn ma trận chi phí.

$$c'_{ij} = c_{ij} - \alpha_i - \beta_j$$

Sao cho: mỗi hàng và mỗi cột có ít nhất 1 giá trị bằng 0

=> Đường đi có chi phí ít nhất (cận dưới) không nhỏ hơn tổng các giá trị mà ta đã trừ đi ở tất cả các hàng và cột

$$\gamma(S) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{n} \beta_j$$

XÁC ĐỊNH CẬN DƯỚI

- Ví dụ: Ma trận chi phí

	1	2	3	4	5	6	r[i]
1	∞	3	93	13	33	9	3
2	4	∞	77	42	21	16	4
3	45	17	∞	36	16	28	16
4	39	90	80	∞	56	7	7
5	28	46	88	33	∞	25	25
6	3	88	18	46	92	∞	3
s[j]	0	0	15	8	0	0	

Ma trận rút gọn

	1	2	3	4	5	6
1	∞	0	75	2	30	6
2	0	∞	58	30	17	12
3	29	1	∞	12	0	12
4	32	83	58	∞	49	0
5	3	21	48	0	∞	0
6	0	85	0	35	89	∞

- Cận dưới = 3 + 4 + 16 + 7 + 25 + 3 + 15 + 8 = 81

QUY TẮC PHÂN NHÁNH

- Giả sử cần phân nhánh tập $S_p \subset S_0$
- Cách phân nhánh: chia thành 2 tập S_{p1} chứa cạnh (r,s) và S_{p2} không chứa cạnh (r,s)
- Cạnh (r,s) được chọn sao cho: S_{p1} có khả năng chứa phương án tối ưu

  => chọn (r,s) | hiệu cận dưới của S_{p1} và S_{p2} là max

QUY TẮC PHÂN NHÁNH

- Ma trận chi phí: C = [c_{ij}] – đã rút gọn
- Ta xét các tập hợp tương ứng là S_0, S_1, S_2
  - S_1 là tập đường đi chứa cạnh (r, s), S_2 không chứa (r, s)
- Ta thấy:
  - Với S_1, cấu trúc bài toán không thay đổi; ma trận C bớt đi hàng r, cột s. Ma trận mới thỏa mãn dạng rút gọn
    => hàm cận dưới tăng thêm: $\gamma(S_1) = c_{rs}$
  - Với S_2, x_{rs} = 0 => $\exists x_{rj}, x_{is} = 1 \ (j \neq s, i \neq r)$
    => hàm cận dưới tăng thêm: $\gamma(S_2) = \min_{j \neq s} c_{rj} + \min_{i \neq r} x_{is}$

QUY TẮC PHÂN NHÁNH

- Nếu chọn cạnh (r,s) có chi phí $c_{rs} > 0$:

  Trên hàng r và cột s chắc chắn tồn tại phần tử bằng 0

  => $\gamma(S_2) = 0 < c_{rs}$ => loại

- Nếu chọn cạnh (r,s) có chi phí = 0

  Hiệu chênh lệch của $\gamma(S_1)$ và $\gamma(S_2)$ chính là $\gamma(S_2)$

  Để giá trị này lớn nhất: ta tìm cặp (r, s):

$$\max_{r,s}\left(\min_{j\neq s} c_{rj} + \min_{i\neq r} x_{is}\right) \qquad (*)$$

=> Với một tập đường đi, ta chọn cạnh (r, s) thoả mãn (*) để phân thành 2 tập con: 1 tập đường đi chứa cạnh (r, s) và 1 tập không chứa cạnh (r, s)

NGĂN CẤM TẠO CHU TRÌNH CON

- Sau khi lựa chọn ta cần thực hiện 1 số thay đổi bắt buộc trước khi tính lại cận dưới:
  - Nếu $x_{uj} = 0 \; \forall \, j = \overline{1,n} \setminus \{v\} \Rightarrow \; x_{uv} = 1$
  - Nếu $x_{jv} = 0 \; \forall \, j = \overline{1,n} \setminus \{u\} \Rightarrow \; x_{uv} = 1$
  - Nếu không chọn cạnh (r, s) thì $c_{rs} = \infty$
  - Nếu đã chọn cạnh (r, s) thì $c_{sr} = \infty$
  - Trong những cạnh đã chọn nếu có thể thêm cạnh nào đó để tạo thành chu trình thì phải đặt chi phí của cạnh này là ∞

  Ví dụ: Nếu đã chọn cạnh (1, 2) và (2, 5) => phải đặt giá trị cạnh (5,2) $C_{52} = \infty$

VÍ DỤ - CHỌN CẠNH PHÂN NHÁNH

	1	2	3	4	5	6
1	∞	0	75	2	30	6
2	0	∞	58	30	17	12
3	29	1	∞	12	0	12
4	32	83	58	∞	49	0
5	3	21	48	0	∞	0
6	0	85	0	35	89	∞

	1	2	3	4	5	6
1	∞	0^{3}	75	2	30	6
2	0^{12}	∞	58	30	17	12
3	29	1	∞	12	0^{18}	12
4	32	83	58	∞	49	0^{32}
5	3	21	48	0^{2}	∞	0^{0}
6	0^{0}	85	0^{48}	35	89	∞

VÍ DỤ - CHỌN CẠNH PHÂN NHÁNH

	1	2	3	4	5	6
1	∞	0	75	2	30	6
2	0	∞	58	30	17	12
3	29	1	∞	12	0	12
4	32	83	58	∞	49	0
5	3	21	48	0	∞	0
6	0	85	0	35	89	∞

	1	2	3	4	5	6
1	∞	0^{3}	75	2	30	6
2	0^{12}	∞	58	30	17	12
3	29	1	∞	12	0^{18}	12
4	32	83	58	∞	49	0^{32}
5	3	21	48	0^{2}	∞	0^{0}
6	0^{0}	85	0^{48}	35	89	∞

Chọn cạnh (6, 3) để phân nhánh

VÍ DỤ - CHỌN CẠNH PHÂN NHÁNH

	1	2	4	5	6
1	∞	0	2	30	6
2	0	∞	30	17	12
3	29	1	12	0	∞
4	32	83	∞	49	0
5	3	21	0	∞	0

S_1: xóa hàng 6, cột 3, đặt $c_{36} = \infty$

	1	2	3	4	5	6
1	∞	0^{3}	75	2	30	6
2	0^{12}	∞	58	30	17	12
3	29	1	∞	12	0^{18}	12
4	32	83	58	∞	49	0^{32}
5	3	21	48	0^{2}	∞	0
6	0^{0}	85	∞	35	89	∞

S_2: đặt $c_{63} = \infty$

VÍ DỤ - CHỌN CẠNH PHÂN NHÁNH

	1	2	4	5	6
1	∞	0^{3}	2	30	6
2	0^{15}	∞	30	17	12
3	29	1	12	0^{18}	∞
4	32	83	∞	49	0^{32}
5	3	21	0^{2}	∞	0^{0}

	1	2	3	4	5	6
1	∞	0^{3}	75	2	30	6
2	0^{12}	∞	58	30	17	12
3	29	1	∞	12	0^{18}	12
4	32	83	58	∞	49	0^{32}
5	3	21	48	0^{2}	∞	0^{0}
6	0^{0}	85	∞	35	89	∞

S_1: xóa hàng 6, cột 3, đặt $c_{36} = \infty$
Cận dưới mới: 81

S_2: đặt $c_{63} = \infty$
Cận dưới mới: 81 + 48 = 129

VÍ DỤ

	1	2	4	5	6
1	∞	0^{3}	2	30	6
2	0^{15}	∞	30	17	12
3	29	1	12	0^{18}	∞
4	32	83	∞	49	0^{32}
5	3	21	0^{2}	∞	0^{0}

	1	2	4	5
1	∞	0^{3}	2	30
2	0^{20}	∞	30	17
3	29	1	∞	0^{18}
5	3	21	0^{5}	∞

Có cạnh (4, 6) và (6, 3) => phải đặt cạnh (3, 4) = ∞
Cận dưới mới: 81

	1	2	4	5	6
1	∞	0^{3}	2	30	6
2	0^{15}	∞	30	17	12
3	29	1	12	0^{18}	∞
4	32	83	∞	49	∞
5	3	21	0^{2}	∞	0^{6}

Cận dưới mới:
81 + 32 = 113

VÍ DỤ

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 4 & 5 \\
\hline
1 & \infty & 0^{3} & 2 & 30 \\
2 & 0^{20} & \infty & 30 & 17 \\
3 & 29 & 1 & \infty & 0^{18} \\
5 & 3 & 21 & 0^{5} & \infty
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & 2 & 4 & 5 \\
\hline
1 & \infty & 2 & 30 \\
3 & 1 & \infty & 0 \\
5 & 21 & 0 & \infty
\end{array}$$

Chọn cạnh (2, 1) => đặt cạnh (1, 2) = ∞

Rút gọn lại ma trận

Cận dưới mới:

81 + 1 + 2 = 84

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & 2 & 4 & 5 \\
\hline
1 & \infty & 0^{28} & 28 \\
3 & 0^{20} & \infty & 0^{28} \\
5 & 20 & 0^{20} & \infty
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|cccc|}
 & 1 & 2 & 4 & 5 \\
\hline
1 & \infty & 0^{3} & 2 & 30 \\
2 & \infty & \infty & 30 & 17 \\
3 & 29 & 1 & \infty & 0^{18} \\
5 & 3 & 21 & 0^{5} & \infty
\end{array}$$

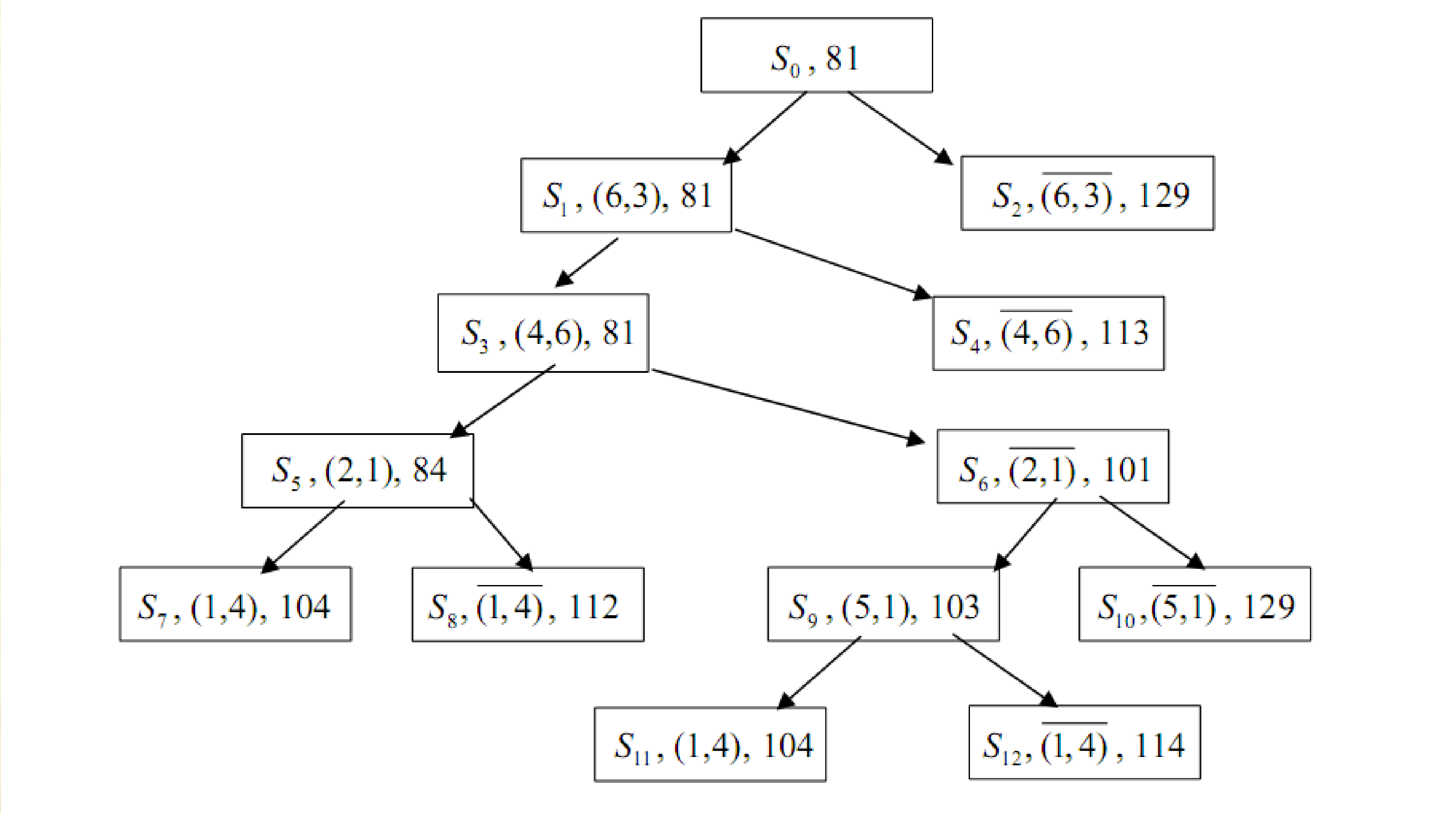
Cận dưới mới:

81 + 20 = 101

…

VÍ DỤ

- Kết quả: đường đi (1, 4, 6, 3, 5, 2, 1) chi phí: 104



TT NHÁNH CẬN GIẢI BÀI TOÁN NGƯỜI BÁN HÀNG

- Thủ tục rút gọn ma trận, tính cận dưới (tr 126)
- Thủ tục chọn cạnh phân nhánh (tr 128)
- Thuật toán (tr 134)