

Bài toán tồn tại

TOÁN RỜI RẠC

NỘI DUNG

- ✘ Giới thiệu
- ✘ Các phương pháp chứng minh
- ✘ Nguyên lý Dirichlet

GIỚI THIỆU

- ✘ Bài toán tồn tại xét sự tồn tại của những tổ hợp thỏa mãn những tính chất xác định
- ✘ Có 2 khả năng: chứng minh có (không có) hoặc chỉ ra cách xây dựng

VÍ DỤ

- ✘ Định lý Fermat lớn

Không tồn tại nghiệm nguyên khác không x, y, z thỏa mãn $x^n + y^n = z^n$ ($n > 2$)

- ✘ Bài toán tô màu bản đồ

Mọi bản đồ trên mặt phẳng đều có thể tô bằng 4 màu sao cho không có 2 miền nào có chung biên giới cùng màu với nhau.

- ✘ Số nguyên tố sinh đôi

Tồn tại vô hạn số nguyên tố sinh đôi? (là những số nguyên tố có dạng $n, n+2$)

CÁC PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH

- × Ví dụ
- × Vết cạn
- × Quy nạp
- × Chứng minh bằng phản chứng

CHỨNG MINH BẰNG VÍ DỤ

- ✘ Cho $p(n) = n^2 + n + 41$. Chứng minh $p(n)$ là số nguyên tố với mọi số tự nhiên n

CHỨNG MINH BẰNG VÍ DỤ

✘ Phỏng đoán của Euler (1769):

Phương trình $a^4 + b^4 + c^4 = d^4$ không có nghiệm nguyên dương

(1986) Noam Elkies đưa ra được phản ví dụ:

$$2682440^4 + 15365639^4 + 18796760^4 = 20615673^4$$

(1988) Roger Frye tìm ra phản ví dụ nhỏ nhất là:

$$95800^4 + 217519^4 + 414560^4 = 422481^4$$

CHỨNG MINH BẰNG VÍ DỤ

Hypothesis:

$$313. (x^3 + y^3) = z^3$$

Không có nghiệm nguyên dương

Sai!

Phản ví dụ nhỏ nhất có hơn 1000 chữ số!

PHƯƠNG PHÁP VẾT CẠN

Chia nhỏ tất cả trường hợp thành các nhóm trường hợp con và chứng minh từng trường hợp một cách riêng rẽ.

Ví dụ: Chứng minh rằng nếu n không chia hết cho 3 thì n^2 chia 3 dư 1

Nếu n không chia hết cho 3 $\Rightarrow n$ chia 3 dư 1 hoặc 2

$$+) n = 3m+1 \Rightarrow n^2 = (3m+1)^2 = 9m^2 + 6m + 1$$

$$+) n = 3m+2 \Rightarrow n^2 = (3m+2)^2 = 9m^2 + 12m + 4$$

$\Rightarrow n^2$ chia 3 dư 1

PHƯƠNG PHÁP VẾT CẠN

- ✘ Số trường hợp đôi khi rất lớn.
- ✘ Bài toán điển hình: **định lý bốn màu**

Cách chứng minh đầu tiên: 1.936 trường hợp.

Cách chứng minh ngắn nhất: hơn 600 trường hợp.

PHƯƠNG PHÁP QUY NẠP

- ✘ Cần chứng minh: $P(n)$ với n là số tự nhiên, $n \geq a$
- ✘ Chứng minh quy nạp gồm 2 bước:

+ Bước 1: Bước cơ sở

Ta chứng minh $P(n)$ đúng với $n = a$

+ Bước 2: Bước quy nạp

- ✘ Giả sử $P(n)$ đã đúng cho các trường hợp $a \leq n \leq k$
- ✘ Dựa trên những điều kiện có được, ta chứng minh $P(n)$ đúng với $n = k+1$.

Từ 2 bước này, theo nguyên lý quy nạp toán học \Rightarrow xong!

VÍ DỤ: CHỨNG MINH $\forall n \geq 5 \rightarrow 2^n > n^2$

+) Bất đẳng thức đúng với $n = 5$:

$$2^5 = 32 > 25 = 5^2$$

+) Giả sử biểu thức đúng với $n = k$ tức là: $2^k > k^2$

Ta sẽ chứng minh biểu thức cũng đúng với $n = k+1$

$$\text{Thật vậy: } 2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2 = (k+1)^2 + (k-1)^2 - 2$$

$$\text{Vì } k > 5 \text{ nên } (k-1)^2 - 2 > 0$$

$$\Rightarrow 2^{k+1} > (k+1)^2$$

Vậy bất đẳng thức đúng với $n = k+1$

Theo nguyên lý quy nạp ta có: $2^n > n^2$ với mọi $n \geq 5$

PHƯƠNG PHÁP PHẢN CHỨNG

✘ Ý tưởng:

Giả sử điều ngược lại của điều cần chứng minh.

Từ điều giả sử ta tìm ra mâu thuẫn \Rightarrow điều cần chứng minh là đúng

VÍ DỤ

- ✗ Chứng minh $\sqrt{2}$ là số nguyên tố
- ✗ Giả sử $\sqrt{2}$ không là số vô tỉ
 - $\Rightarrow \sqrt{2} = a/b \in Q, a, b \in N$ (a/b là phân số tối giản)
 - $\Rightarrow 2 = a^2/b^2$
 - $\Rightarrow a^2 = 2b^2$
 - $\Rightarrow a : 2 \Rightarrow b : 2 \Rightarrow a/b$ không là phân số tối giản
 - \Rightarrow mâu thuẫn
 - \Rightarrow giả sử sai
 - $\Rightarrow \sqrt{2}$ là số nguyên tố

VÍ DỤ

- ✘ Chứng minh không tồn tại số nguyên tố lớn nhất
- ✘ Giả sử số nguyên tố lớn nhất là p

NGUYÊN LÝ DIRICHLET

NGUYÊN LÝ DIRICHLET

✘ *Nếu xếp $n+1$ đồ vật vào trong n chiếc hộp thì có ít nhất 1 chiếc hộp có từ 2 đồ vật chở lên*

✘ Ví dụ:

Trong 13 người luôn có ít nhất 2 người sinh cùng tháng

✘ Tổng quát: *Nếu đem xếp n đồ vật vào trong k chiếc hộp thì sẽ có ít nhất 1 hộp chứa không ít hơn n/k vật*

VÍ DỤ

Ví dụ 1: Chứng minh rằng trong 1 cuộc họp bao giờ cũng có ít nhất 2 người có số người quen (trong những người tham gia) bằng nhau.

Số người: n

Số người quen mà một người có thể có: $0 \rightarrow n-1$

Vì số người quen bằng 0 và $n-1$ không thể xảy ra đồng thời
 \Rightarrow có tối đa $n-1$ cách chọn cho số người quen của 1 người

VÍ DỤ

Ví dụ 2: Trong kỳ thi giữa kỳ, điểm được phân bố từ 0 đến 10. Điểm lẻ đến 0.5. Hỏi số sinh viên của lớp ít nhất là bao nhiêu thì chắc chắn có 3 bạn bằng điểm nhau?

Số hộp: 21

⇒ số sinh viên ít nhất để ... là:

$$21 \times (3-1) + 1 = 43 \text{ (sv)}$$