Bài toán đếm

TOÁN RỜI RẠC

GIỚI THIỆU

- Việt Nam có bao nhiêu tỉnh, thành phố?
- Có bao nhiêu tỉnh có tên bắt đầu bằng chữ A?
- Lớp có bao nhiêu sinh viên?
- Có bao nhiêu bạn thi qua môn toán rời rạc?

⇒ Đơn giản

- Có bao nhiêu số chẵn có 6 chữ số khác nhau?
- Có bao nhiêu cách xếp 6 người ngồi quanh một bàn tròn?

GIỚI THIỆU

- Xác định độ phức tạp thuật toán
- Xác định xem số điện thoại / địa chỉ IP / số chứng minh nhân dân… có đủ đáp ứng nhu cầu sử dụng?
- Khả năng trúng số độc đắc?
- Khả năng nhiễm bệnh?

BÀI TOÁN

- Xác định lực lượng của một (hay nhiều) tập hợp thỏa mãn một số điều kiện cho trước

- Bài toán đếm có thể được phân chia thành những bài toán nhỏ hơn, dễ tìm được lời giải hơn

CÁC NGUYÊN LÝ CƠ BẢN

NGUYÊN LÝ CỘNG

- Có 2 công việc A và B. Các việc này có thể làm tương ứng bằng n_1, n_2 cách và không thể làm đồng thời. Khi đó số cách làm một trong 2 việc đó là $n_1 + n_2$.
- Công thức: Cho 2 tập hợp A, B | $A \cap B = \emptyset$

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B)$$

- Tổng quát: Cho $A_1, \ldots, A_n$ là một phân hoạch của A

$$N(A) = N(A_1) + \cdots + N(A_n)$$

NGUYÊN LÝ CỘNG

- Ví dụ:

1. Hôm nay có 5 bài tập môn GT, 6 bài môn TRR, 9 bài môn ĐS. Hỏi có mấy cách chọn bài tập đầu tiên để bắt đầu?
2. Sau khi thực hiện đoạn CT sau thì k = ?

   k := 0;

   for i_1 := 1 to n_1 k := k+1;

   for i_2 := 1 to n_2 k := k+1;

   …

   for i_m := 1 to n_m k := k+1;

NGUYÊN LÝ NHÂN

- Giả sử một nhiệm vụ nào đó được tách ra thành 2 việc A và B. Nếu việc A có thể làm bằng n_1 cách, việc B có thể làm (sau A) bằng n_2 cách, khi đó có $n_1.n_2$ cách thi hành nhiệm vụ đã cho
- Công thức: $N(A \times B) = N(A) \times N(B)$
- Tổng quát:

$$N(A_1 \times \cdots \times A_n) = N(A_1) \times \ ... \times N(A_n)$$

NGUYÊN LÝ NHÂN

- Có bao nhiêu cách sắp xếp có thứ tự một bộ gồm n phần tử?
- Có bao nhiêu cách chọn một bộ có thứ tự gồm k phần tử từ n phần tử cho trước?
- Có bao nhiêu cách chọn một bộ không có thứ tự gồm k phần tử từ n phần tử cho trước?

NGUYÊN LÝ NHÂN

- Ví dụ;

1. Theo cách đặt biển số xe hiện tại thì HN có thể cấp tối đa bao nhiêu biển? (sử dụng 20 chữ cái)
   + Kí hiệu: 29, 30, 31, 32, 33, 40
   + Sử dụng 15 chữ cái: F, H, K, L, M, N, P, R, S, T, U, V, X, Y, Z
2. Số $p_1^{n1}.p_2^{n2}\ldots.p_3^{n3}$ (p_i là số nguyên tố phân biệt, n_i là số nguyên dương) có bao nhiêu ước số?

NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

- Cho trước 2 tập hợp A và B.

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$

- Định lý: cho n tập A_1, A_2, …, A_n

$$N(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = N_1 - N_2 + \cdots + (-1)^{n-1} N_n$$

Trong đó: N_k là tổng số phần tử của giao k tập bất kỳ trong số n tập đã cho

Cách chứng minh: xét số lần được đếm của phần tử a (xuất hiện k lần trong n tập) trong vế phải của định lý (tr 20)

NGUYÊN LÝ BÙ TRỪ

- Nguyên lý bù trừ:

Đồng nhất tập A_k với tính chất A_k trên tập X. Khi đó số phần tử thuộc X không thỏa mãn tính chất A_k nào sẽ bằng:

$$\overline{N} = N(X) - N(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$$

VÍ DỤ

1. Có bao nhiêu số bé hơn 1000, chia hết cho 2 hoặc 9
2. Trong một bữa tiệc, có tất cả 35 món ăn. Trong đó: 16 món có thịt, 14 món là đồ rán; trong số các món ăn có thịt, 8 món chứa rau và 7 món được rán; trong các món rán, 5 món có rau. Chỉ 2 món vừa thịt, vừa rán, vừa có rau. 10 món tráng miệng 0 rán, 0 rau, 0 thịt. Hỏi có bao nhiêu món chỉ có rau?

QUY TẮC CHIA

- Nếu tập hữu hạn A là hợp của n tập rời nhau, mỗi tập có k phần tử thì

$$n = N(A)/k$$

- Nói cách khác: Nếu f là một toàn ánh từ A vào B, (A, B là 2 tập hữu hạn) mỗi phần tử của B có đúng k phần tử x thuộc A sao cho f(x) = y thì:

$$N(B) = N(A)/k$$

QUY TẮC CHIA

- Ví dụ:

1. Có bao nhiêu cách sắp xếp có thứ tự bộ số:
   {1, 1, 1, 2, 3}
2. Có bao nhiêu cách sắp 4 người ngồi quanh bàn tròn?
   (2 cách xếp là giống nhau khi ng ngồi bên trái giống nhau và ng ngồi bên phải giống nhau)

HỆ SỐ NHỊ THỨC
(BINOMIAL COEFFICIENTS)

CÔNG THỨC MỞ RỘNG

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & nếu\ 0 \le k \le n \\ 0 & ngược\ lại \end{cases}$$

N chọn k

CÁC TÍNH CHẤT CỦA HỆ SỐ NHỊ THỨC

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

$$(x+y)^n = \sum_{k} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$$

VÍ DỤ

1. Đội Croatia đăng ký 18 cầu thủ thi đấu, gồm 2 thủ môn, 6 hậu vệ, 6 tiền vệ, 4 tiền đạo. Huấn luyện viên có bao nhiêu cách chọn các cầu thủ thi đấu theo sơ đồ 4-4-2?

CÔNG THỨC TRUY HỒI

CÔNG THỨC TRUY HỒI

- Là một trong những kĩ thuật quan trọng nhất của khoa học máy tính
- Ý tưởng: "thu gọn" một bài toán thành bài toán tương tự nhưng nhỏ hơn.
- Điều kiện: bài toán nhỏ nhất phải có đáp án rõ ràng

CÔNG THỨC TRUY HỒI

- **Định nghĩa:** Công thức truy hồi của dãy số $\{a_n\}$ là công thức biểu diễn a_n qua một hay nhiều số hạng đi trước.
- Ví dụ: Tiền gửi ngân hàng

Ban đầu: gửi số tiền A, kỳ hạn 1 tháng, lãi suất 6%/năm, lãi nhập gốc. Hỏi sau 10 năm 3 tháng có bao nhiêu tiền?

Một chu kì có lãi: 6:100:12 = 0.005

Ban đầu: $r_0 = A$

$r_1 = r_0 * 1.005$

…

$r_n = r_{n-1} * 1.005$ 10 năm 3 tháng => n = 123

VÍ DỤ 1

- Người ta thả lên một hòn đảo hoang 1 cặp thỏ
- Loài thỏ này trưởng thành khi được 1 tháng
- Thỏ trưởng thành 1 tháng lại sinh 1 cặp thỏ mới
- Sau10 năm thì trên đảo có bao nhiêu cặp thỏ?

(giả sử là bọn chúng đều thọ trên 10 năm)

VÍ DỤ 1

- Ký hiệu:
  - Số cặp thỏ của tháng thứ n là R_n
  - Số cặp thỏ mới sinh của tháng thứ n là: S_n

Khi đó: $R_n = R_{n-1} + S_{n-1}$

Ta thấy: $S_{n-1} = R_{n-2}$

$\rightarrow R_n = R_{n-1} + R_{n-2}$

Đây là bài toán thực tế, dãy số dựa trên tính toán về số thỏ sau này được đặt tên Fibonaci

VÍ DỤ 2

- Cho tập con n phần tử $S = \{a_1, \dots a_n\}$
- Tập S có bao nhiêu tập con? (không sử dụng tổ hợp)

n = 1: có 2 tập con $\{\Phi, \{a_1\}\}$ $r_1 = 2$

n = 2: có 4 tập con $\{\Phi, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1,a_2\}\}$ $r_2 = 4$

n = 3: hợp của 2 tập $\{\Phi, \{a_1\}, \{a_2\}, \{a_1,a_2\}\}$

và $\{a_3, \{a_1,a_3\}, \{a_2,a_3\}, \{a_1,a_2,a_3\}\}$

$\rightarrow$ $r_3 = 2r_2$

VÍ DỤ 2

- Các tập con của S_{n-1}

$\{\Phi,\{a_1\},\{a_2\}, \ldots, \{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\}\}$

- Các tập con của S_n?

Định nghĩa qua các phần tử trước đó?

$\{\Phi, \{a_1\}, \{a_2\}, \ldots, \{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1}\}\}$

Và $\{a_n, \{a_1,a_n\}, \{a_2,a_n\}, \ldots, \{a_1,a_2,\ldots,a_{n-1},a_n\}\}$

Kết luận: $r_n = 2r_{n-1}$

VÍ DỤ 3

- Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài n không chứa xâu 00?
- Kí hiệu: r_n là số lượng xâu thỏa mãn điều kiện
- Ta thấy:

  $r_1 = 2: \{0, 1\}$

  $r_2 = 3: \{01, 10, 11\}$

  $r_3 = 5: \{101, 110, 111, 010, 011\}$

  $r_4 = 8: \{1101, 1110, 1111, 1010, 1011, 0101, 0110, 0111\}$

  $r_4 = \{1101, 1110, 1111, 1010, 1011\} \cup \{0101, 0110, 0111\}$

VÍ DỤ 3

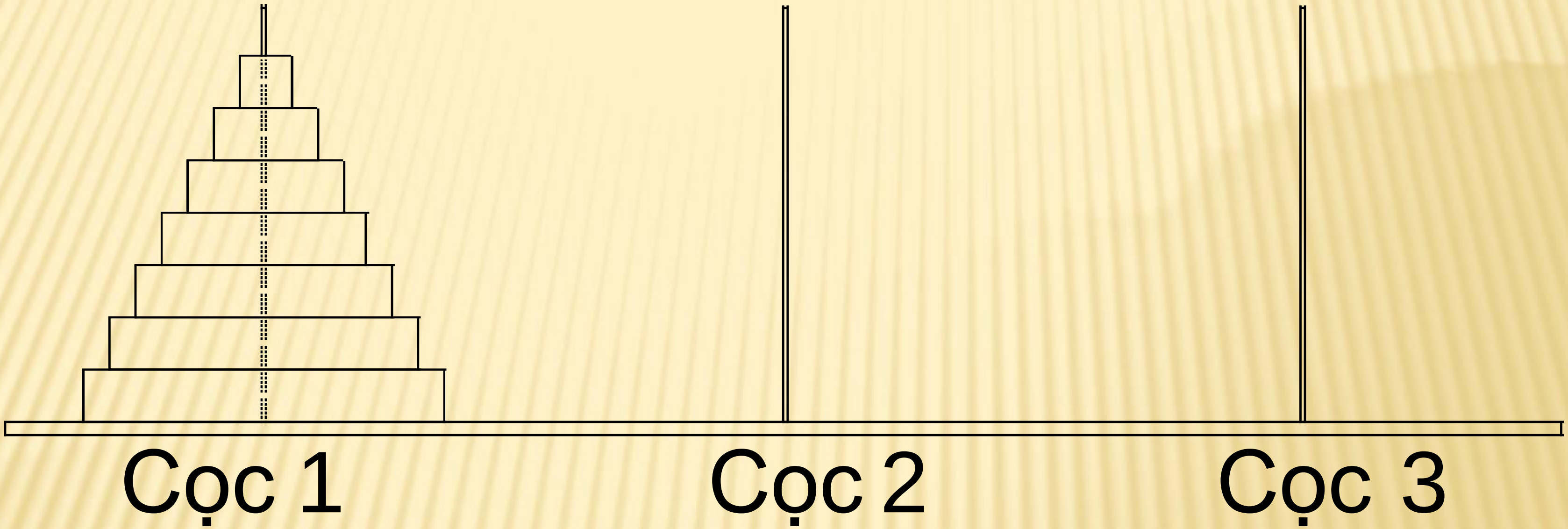
- Với xâu có độ dài n:
  - Kí tự đầu tiên là 1

  => n-1 kí tự phía sau không chứa xâu thì xâu sẽ thỏa mãn điều kiện (có r_{n-1} xâu thỏa mãn điều kiện này)
  - Kí tự đầu tiên là 0

  ⇒ n-2 kí tự phía sau không chứa xâu 00 thì xâu sẽ thỏa mãn điều kiện (có r_{n-2} xâu thỏa mãn điều kiện này)
  - Ngoài ra?
- Vậy số xâu nhị phân độ dài n, không chứa xâu 00 sẽ là

$$r_n = r_{n-1} + r_{n-2}$$

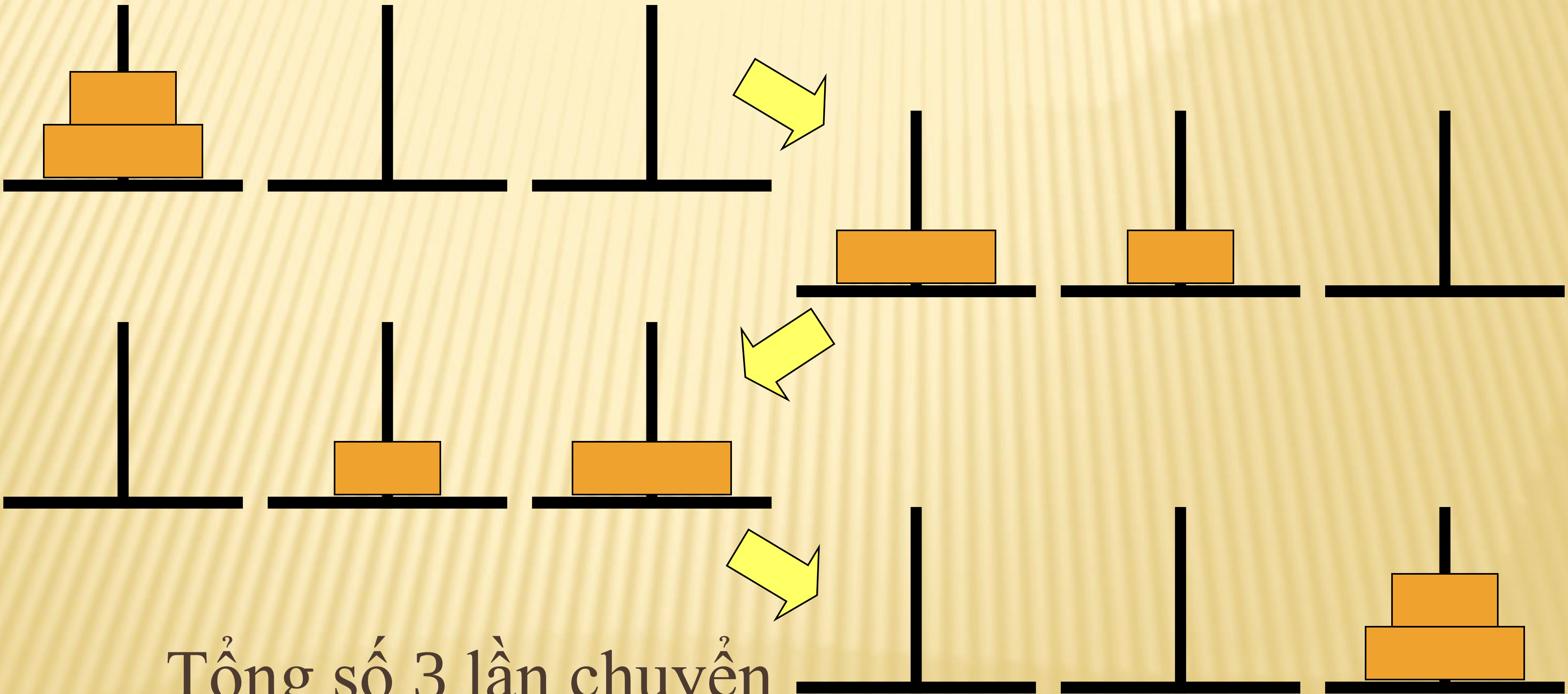
THÁP HÀ NỘI



- Mục tiêu: chuyển các đĩa từ cột 1 sang cột 3
- Luật chơi: mỗi lần chuyển 1 đĩa, đĩa nằm trên phải nhỏ hơn đĩa nằm dưới

THÁP HÀ NỘI

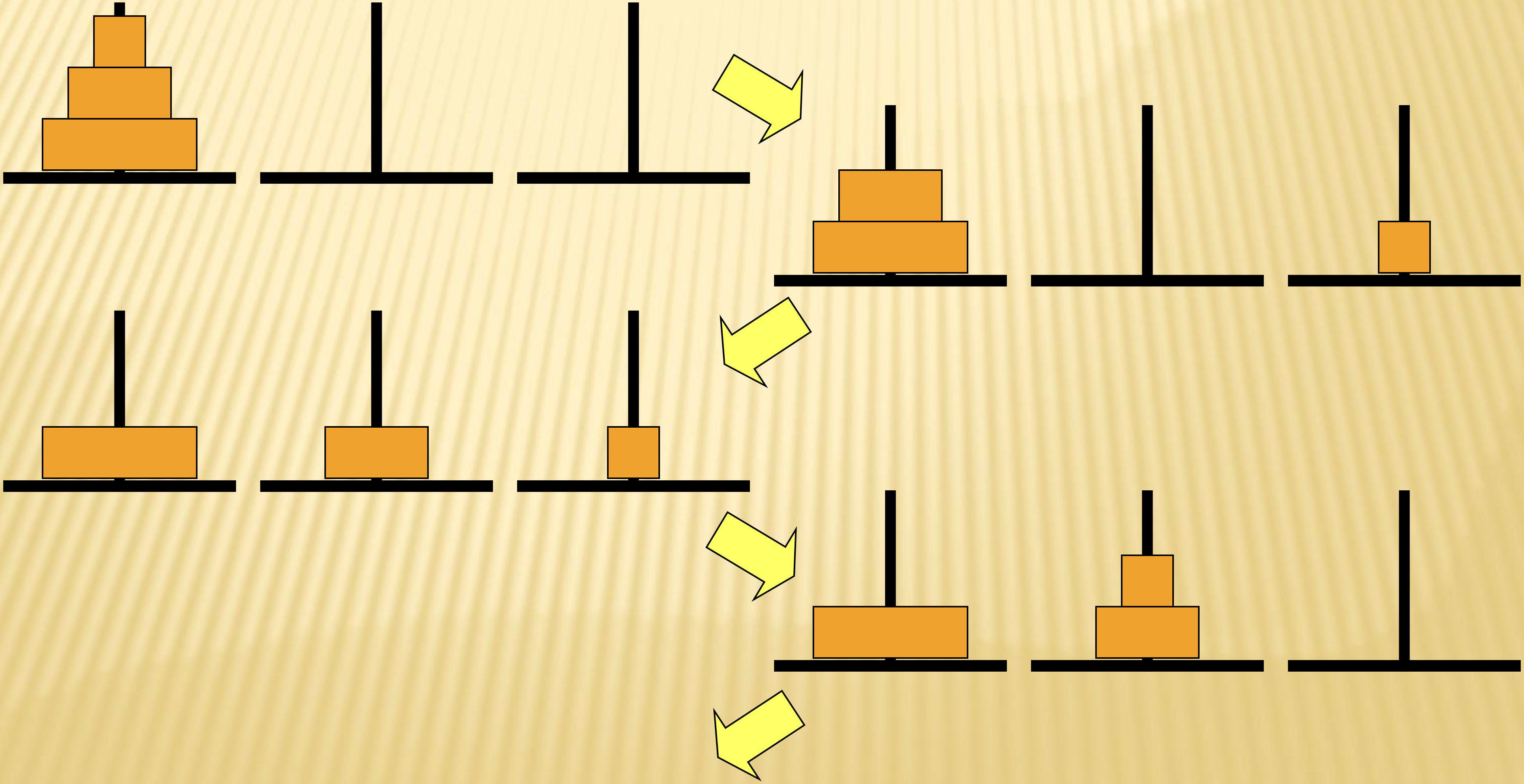
Với 2 đĩa



Tổng số 3 lần chuyển

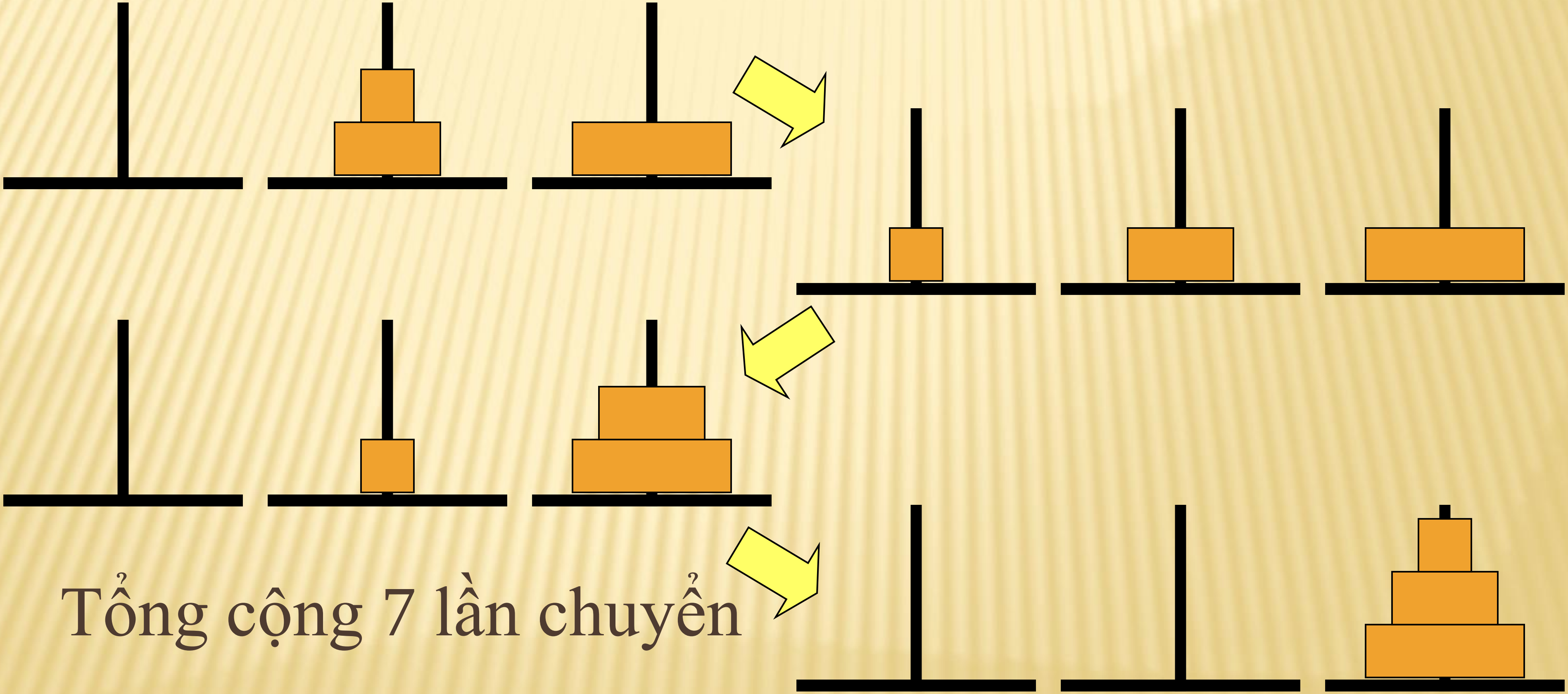
THÁP HÀ NỘI

Với 3 đĩa



THÁP HÀ NỘI

Với 3 đĩa



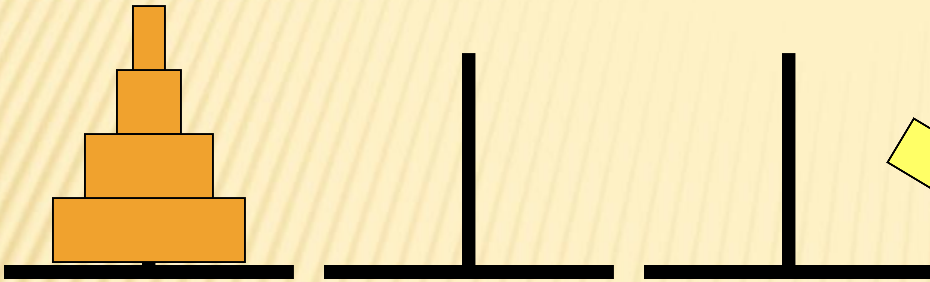
Tổng cộng 7 lần chuyển

THÁP HÀ NỘI

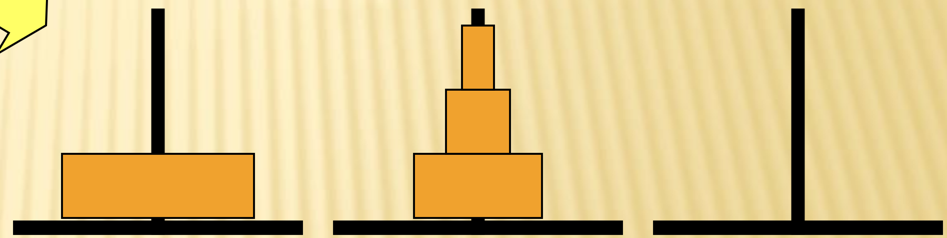
Có thể giải quyết n đĩa được không?

THÁP HÀ NỘI

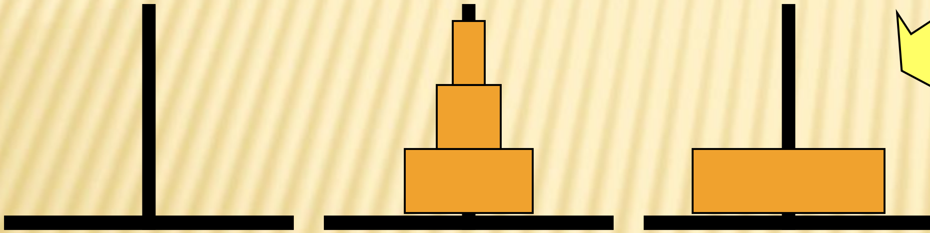
- Với 4 đĩa (giả sử đã có chương trình chuyển 3 đĩa)



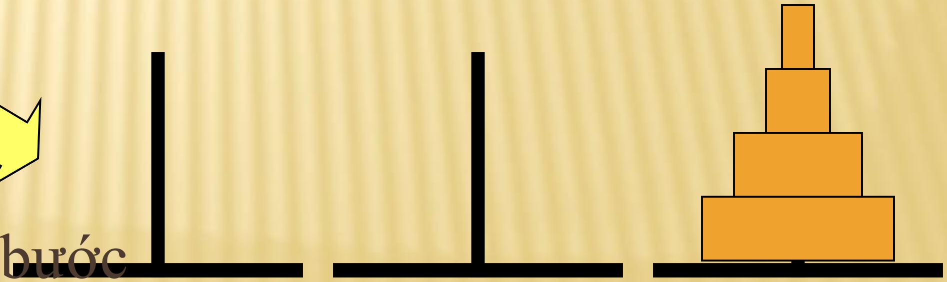
Để chuyển đĩa to nhất từ cọc 1 sang cọc 3.
Ta phải chuyển 3 đĩa phía trên sang cọc 2 trước
Sử dụng đoạn chương trình cho 3 đĩa



Sau đó ta chuyển đĩa từ cọc 1 sang sọc 3.



Sau đó ta lại dùng chương trình chuyển 3 đĩa
để chuyển từ cọc 2 sang cọc 3

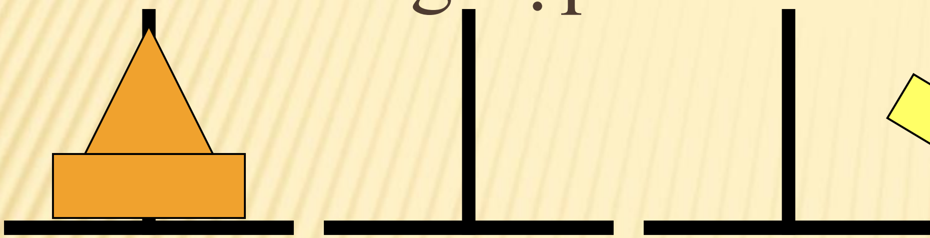


Để chuyển 3 đĩa cần 7 bước

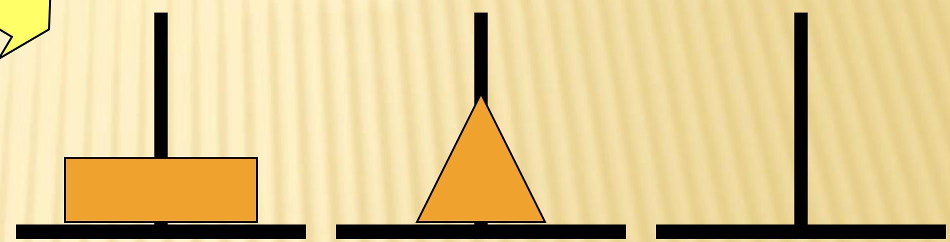
~> chuyển 4 đĩa cần 7x2 + 1 = 15 bước

THÁP HÀ NỘI

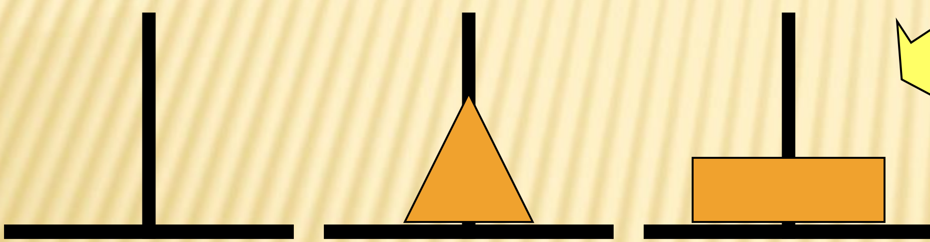
Với trường hợp n đĩa



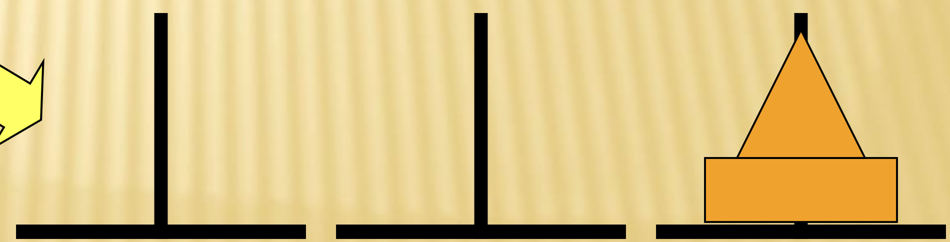
Để chuyển đĩa to nhất từ cọc 1 sang cọc 3.
Ta phải chuyển n-1 đĩa phía trên sang cọc 2 trước
Sử dụng đoạn chương trình cho n-1 đĩa



Sau đó chuyển đĩa to nhất từ cọc 1 sang cọc 3



Sau đó lại dùng chương trình
chuyển n-1 đĩa từ cọc 2 sang 3



Tổng số: $\mathbf{r_n = 2r_{n-1} + 1}$

THÁP HÀ NỘI

```
Public static void move(int n, char sta, char sto,
char mid){
      if (n == 1){
            System.out.format("'%c' ? '%c' \n", sta,
sto);
            total++;
            return;
      } else {
            move(n-1, sta, mid, sto);
            move(1, sta, sto, mid);
            move(n-1, mid, sto, sta) ;
      }
}
…
move (n, 'A', 'C', 'B'); //main
```

HÀM SINH

ĐỊNH NGHĨA

- Định nghĩa: Cho trước 1 dãy số thực $\{a_0, a_1, \ldots\}$.

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_i x^i$$

được gọi là hàm sinh của dãy số.

- Nếu dãy là hữu hạn $\{a_0, a_1, \ldots, a_m\}$ thì các hệ số từ a_{m+1} trở đi sẽ bằng 0. Hàm sinh của dãy trở thành đa thức bậc m

VÍ DỤ

Cho n là 1 số nguyên dương; $a_k = \binom{n}{k}$

Hàm sinh của dãy $\{a_i\}$?

Hàm sinh là: $f(x) = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \ldots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n$

VÍ DỤ

- Hàm $\dfrac{1}{1-ax}$ là hàm sinh của {1, a, a^2,…} vì

$$\frac{1}{1-ax} = 1 + ax + a^2x^2 + \ldots$$

Khi $ax < 1 \Leftrightarrow |x| < {}^{1}\!/\!_{|a|}; a \neq 0$

CÁC KHAI TRIỂN THƯỜNG DÙNG

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

PHÉP TOÁN ĐỐI VỚI HÀM SINH

Cho f(x), g(x) là hàm sinh của $\{a_i\}$ và $\{b_i\}$

- Cộng: f(x) + g(x) là hàm sinh của $\{a_i + b_i\}$

$$f(x) + g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i$$

- Nhân với 1 số: αf(x) là hàm sinh của $\{\alpha.a_i\}$

$$\alpha.f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha.a_i x^i$$

- Tích:

$$f(x)g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i} \right) x^k$$

- Đạo hàm: f'(x) là hàm sinh của $\{a_1, 2a_2, 3a_3, \ldots\}$

PHÉP TOÁN ĐỐI VỚI HÀM SINH

- Dịch trái: $\dfrac{f(x)-\sum_{i=0}^{i=k-1} a_i x^i}{x^k}$ là hàm sinh của $\{a_k, a_{k+1},\ldots\}$
- Dịch phải: $x^n.f(x)$ là hàm sinh của $\{0,\ldots,0, a_0, a_1, a_2,\ldots\}$
- Thay αx cho x:

  Hàm $f(\alpha x)$ là hàm sinh của $\{a_0,\alpha a_1,\alpha^2 a_2,\ldots\}$
- Thay x^n cho x:

  Hàm $f(x^n)$ là hàm sinh của $\{a_0,0,\ldots,0,a_1,0,\ldots,0,a_2,\ldots\}$

  (n-1 số 0 một bộ)

HỆ SỐ NHỊ THỨC MỞ RỘNG

- Với u là số thực, k là số nguyên không âm: hệ số nhị thức mở rộng được xác định như sau:

$$\binom{u}{k} = \begin{cases} u(u-1)\ldots(u-k+1)\big/ k! & k > 0 \\ 1 & k = 0 \end{cases}$$

- Khi u = -n (số nguyên âm)

$$\binom{-n}{k} = \frac{-n(-n-1)\ldots(-n-k+1)}{k!} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k}$$

ĐỊNH LÝ NHỊ THỨC MỞ RỘNG

- Cho x là số thực có |x| < 1; u là một số thực bất kỳ.

Khi đó:

$$(1+x)^u = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{u}{k} x^k$$

VÍ DỤ

- Cho f(x) = 1/(1-x)^2 Tìm hệ số trong khai triển Taylor?

Sử dụng: $$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots$$

Và công thức đạo hàm, tích…

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{k} 1\right)x^k = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k$$

VÍ DỤ

- Tìm số nghiệm nguyên của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 = 12 \quad \text{sao cho} \quad 4 \le x_1,\ 2 \le x_2,\ 2 \le x_3 \le 5.$$

- Xét các đa thức:
  + $f(x) = x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8$
  + $g(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$
  + $h(x) = x^2 + x^3 + x^4 + x^5$
- Hệ số của x^{12} trong tích $F(x) = f(x)g(x)h(x)$ là số nghiệm của phương trình trên. =?
- Hàm $F(x)$ được gọi là hàm sinh của số nghiệm của phương trình

VÍ DỤ

1. Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 = 20$$

Thỏa mãn: x_1 lẻ, x_2 chẵn, $x_3 > 4$

Hàm sinh:

$F(x) = (x + x^3 + x^5\ldots)(1 + x^2 + x^4 + \ldots)(x^5 + x^6 + \ldots)$

$$= \frac{x}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{x^5}{1-x} = \frac{x^6}{\left(1-x^2\right)^2\left(1-x\right)}$$

Hệ số của x^{20} = ?

VÍ DỤ

- Có bao nhiêu cách để trả 70k cho máy bán hàng tự động biết rằng máy chỉ nhận tiền 10k, 20k và 50k
- Đổi thành 7, 1, 2, 5
- Hàm sinh:

$$f(x) = (1 + x + x^2 + \ldots)(1 + x^2 + x^4 + \ldots)(1 + x^5 + x^{10} \ldots)$$

$$= \frac{1}{1-x}\frac{1}{1-x^2}\frac{1}{1-x^5} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$$

- Hệ số của x^7 = ?

ichoosefish.com

HÀM SINH VÀ CÔNG THỨC ĐỆ QUY

- Ý tưởng: $$f(x)=\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

là hàm sinh của dãy $\{a_i\}$ được cho bởi công thức truy hồi.

Ta sẽ sử dụng công thức truy hồi để biến đổi f(x) đến khi thu được phương trình có thể dễ dàng giải ra f(x)

Công thức f(x) giúp ta xác định các hệ số a_i

VÍ DỤ

- Dãy số Fibonaci

$F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

Hàm sinh

$$f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{\infty}F_i x^i$$

Lưu ý:

$$xf\left(x\right)=\sum_{i=0}^{\infty}F_i x^{i+1}=\sum_{i=1}^{\infty}F_{i-1}x^i$$

$$x^2 f\left(x\right)=\sum_{i=0}^{\infty}F_i x^{i+2}=\sum_{i=2}^{\infty}F_{i-2}x^{i-2}$$

VÍ DỤ

- Như vậy

$$f(x) = F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + F_4x^4 + \dots$$

$$xf(x) = \qquad F_1x^2 + F_2x^3 + F_3x^4 + \dots$$

$$x^2 f(x) = \qquad F_1x^3 + F_2x^4 + \dots$$

$$\Rightarrow f(x) - xf(x) - x^2 f(x) = F_1x + (F_2 - F_1)x^2 +$$

$$+ (F_3 - F_2 - F_1)x^i + \dots$$

$$= x + 0.x^2 + \sum_{i=3}^{\infty}(F_i - F_{i-1} - F_{i-2})x^i$$

$$= x$$

VÍ DỤ

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b}$$

$$a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}; b = \frac{-1-\sqrt{5}}{2};$$

$$A = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}; B = \frac{-1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{-A}{a}\frac{1}{1-x/a} - \frac{B}{b}\frac{1}{1-x/b}$$

ichoosefish.com

VÍ DỤ

$$f(x) = \frac{-A}{a}\frac{1}{1-x/a} - \frac{B}{b}\frac{1}{1-x/b}$$

- Vì $\frac{1}{1-x/a} = \sum_{i=0}^{\infty}(1/a)^i x^i; \quad \frac{1}{1-x/b} = \sum_{i=0}^{\infty}(1/b)^i x^i$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{A}{a}\sum_{i=0}^{\infty}(1/a)^i x^i - \frac{B}{b}\sum_{i=0}^{\infty}(1/b)^i x^i$$

$$= -\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{A}{a}(1/a)^i + \frac{B}{b}(1/b)^i\right)x^i$$

- Dãy Fibonaci là:

$$F_i = -\frac{A}{a}(1/a)^i - \frac{B}{b}(1/b)^i$$