

Tập hợp - quan hệ - ánh xạ

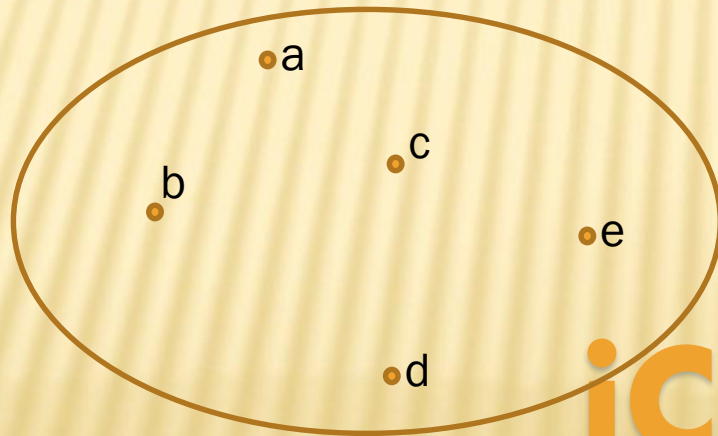
TOÁN RỜI RẠC

TẬP HỢP

- ✘ Các khái niệm cơ bản
- ✘ Phép toán

CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

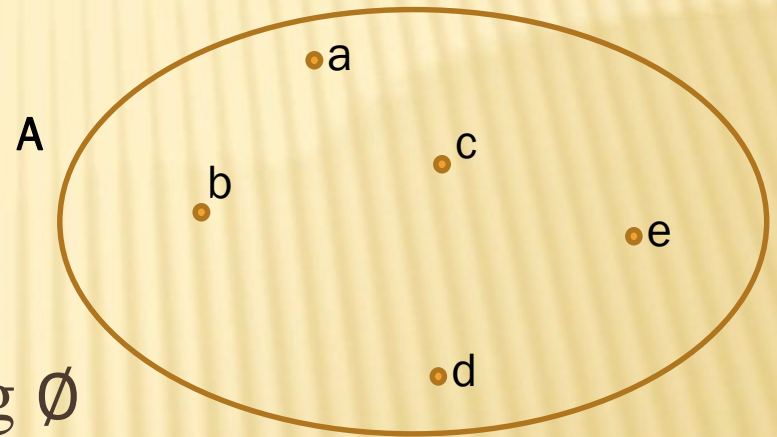
- ✘ Tập hợp là một bộ không có thứ tự các đối tượng
 - + Tập hợp học sinh trong lớp, tập hợp chữ cái tiếng Việt
- ✘ Các đối tượng trong một tập hợp gọi là phần tử



CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

✘ Ký hiệu:

- + Tập hợp: chữ cái in hoa A, B, C, ...
- + Phần tử: chữ cái thường a, b, c, ...
- + Tập hợp không chứa phần tử nào: tập rỗng \emptyset
- + Phần tử thuộc tập hợp: \in



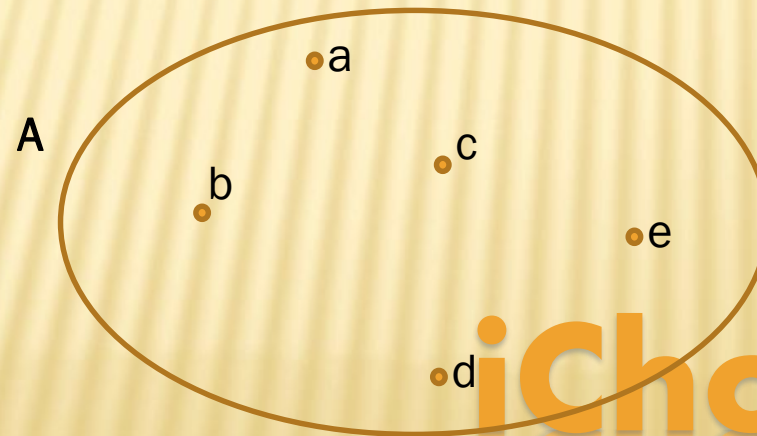
CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

× Các cách biểu diễn:

+ Liệt kê: $A = \{a, b, c, d, e\}$

+ Chỉ ra tính chất tổng quát: $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

+ Biểu đồ Venn



CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

- ✘ Hai tập hợp bằng nhau $A = B$ khi và chỉ khi chúng có cùng các phần tử
 - + $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$
 - + $\{a, a, b, c\} = \{b, b, c, a\}$
- ✘ Tập con: tập hợp A được gọi là tập con của tập hợp B khi và chỉ khi mọi phần tử thuộc tập A thì cũng là phần tử của tập B.
 - + Ký hiệu: $A \subset B$
 - + $\{1, 3\} \subset \{1, 2, 3\}$
- ✘ Lực lượng của tập hợp là số phần tử phân biệt của tập hợp
 - + Ký hiệu: $N(A)$ hoặc $|A|$

CÁC PHÉP TOÁN

Cho trước hai tập hợp: A và B

✘ Phép hợp: \cup

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

✘ Phép giao: \cap

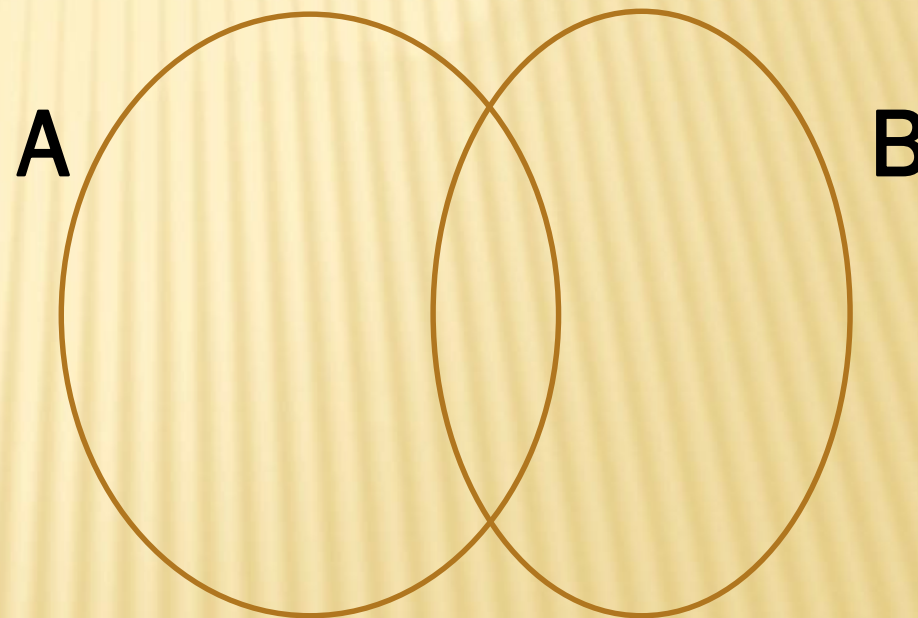
$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

✘ Phép trừ: $-$

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

✘ Phép bù: $\bar{}$

$$\bar{A} = \{x \mid x \notin A\}$$



CÁC PHÉP TOÁN

Cho trước hai tập hợp: A và B

✦ Tích Đề-các: x

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Ví dụ:

$$A = \{1, 2, 4\}$$

$$B = \{\text{xanh}, 2, \text{đỏ}\}$$

$$A \times B = \{ (1, \text{xanh}); (1, 2); (1, \text{đỏ}); (2, \text{xanh}); (2, 2); (2, \text{đỏ}); \\ (4, \text{xanh}); (4, 2); (4, \text{đỏ}) \}$$

TÍNH CHẤT

✘ Luật giao hoán:

$$A \cup B = B \cup A ; A \cap B = B \cap A$$

✘ Luật kết hợp:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C ; A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup C$$

✘ Luật phân phối:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

✘ Luật đối ngẫu:

$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} ; \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$$

MỘT SỐ TẬP HỢP BẰNG NHAU

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cap \Omega = A$$

$$A \cup \Omega = \Omega$$

$$\overline{\overline{A}} = A$$

$$A \cap \overline{A} = \emptyset$$

$$A \cup \overline{A} = \Omega$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

BÀI TẬP

Bài tập 1, 2 trang 16

3. For each of these pairs of sets, determine whether the first is a subset of the second, the second is a subset of the first, or neither is a subset of the other.

a) the set of airline flights from New York to New Delhi, the set of nonstop airline flights from New York to New Delhi

b) the set of people who speak English, the set of people who speak Chinese

c) the set of flying squirrels, the set of living creatures that can fly

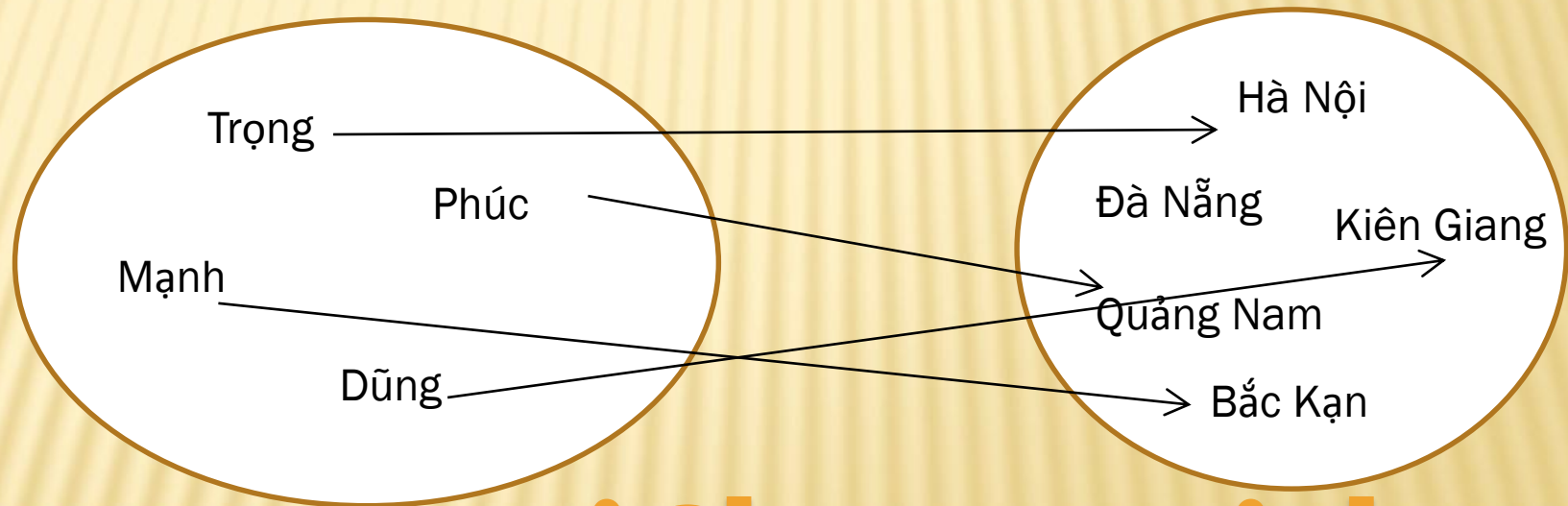
4. Let A , B , and C be sets. Show that $(A - B) - C = (A - C) - (B - C)$.

QUAN HỆ

- ✘ Quan hệ hai ngôi
- ✘ Tính chất
- ✘ Quan hệ tương đương
- ✘ Phân hoạch

QUAN HỆ HAI NGÔI

- ✗ $R \subseteq A \times B$ là một quan hệ hai ngôi từ A đến B.
 - + Hai phần tử a, b thỏa mãn $(a, b) \in R$ được gọi là có quan hệ R với nhau
 - + Ký hiệu aRb
 - + Ví dụ:



- ✗ $R \subseteq A \times A$ là một quan hệ hai ngôi trên tập A

TÍNH CHẤT

Một quan hệ hai ngôi R trên tập A được gọi là có tính chất:

- ✘ Phản xạ: nếu $(x, x) \in R \quad \forall x \in A$
- ✘ Đối xứng: nếu $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
- ✘ Phản đối xứng: nếu $\begin{cases} (x, y) \in R \\ (y, x) \in R \end{cases} \Rightarrow x = y$
- ✘ Truyền ứng: nếu $\begin{cases} (x, y) \in R \\ (y, z) \in R \end{cases} \Rightarrow (x, z) \in R$

VÍ DỤ

Xét quan hệ hai ngôi trên \mathbb{N} sau có tính chất nào

1. $R_1 = \{(a, b) \mid a \leq b\}$
2. $R_2 = \{(a, b) \mid a = b\}$
3. $R_3 = \{(a, b) \mid a < b\}$
4. $R_4 = \{(a, b) \mid a + b = 2\}$
5. $R_5 = \{(a, b) \mid \exists k \in \mathbb{Z} ; a = k*b\}$

Tự nghĩ ra một quan hệ hai ngôi và xác định tính chất nếu có

QUAN HỆ TƯƠNG ĐƯƠNG

- ✘ Định nghĩa: Quan hệ tương đương là một quan hệ hai ngôi có cả ba tính chất: phản xạ, đối xứng và truyền ứng
- ✘ Ví dụ:
 - + aRb nếu $a = b$
 - + Quan hệ đồng hương
 - + aRb nếu $a - b \in \mathbb{Z}$
 - + ...

LỚP TƯƠNG ĐƯƠNG

Cho R là một quan hệ tương đương trên A ; phần tử $a \in A$.

✘ Định nghĩa: Lớp tương đương chứa a là tập chứa tất cả các phần tử có quan hệ R với a

✘ Ký hiệu $[a]_R$ hoặc $[a]$

$$[a]_R = [a] = \{b \in A \mid aRb\}$$

✘ Ví dụ:

$$aRb \text{ nếu } (a - b) : 2 \Rightarrow [1]_R = ? \quad [10]_R = ?$$

LỚP TƯƠNG ĐƯƠNG

✘ Các lớp tương đương có tính chất: phủ kín tập hợp đã cho (mỗi phần tử bất kỳ phải thuộc vào một lớp nào đó) và rời nhau (không có phần tử nào thuộc hai lớp)

✘ Định lý: Cho R là quan hệ tương đương trên A ; $a, b \in A$

Các mệnh đề sau là tương đương:

+ aRb

+ $[a] = [b]$

+ $[a] \cap [b] \neq \emptyset$

PHÂN HOẠCH

- ✘ Một phân hoạch của một tập A là một tập các tập con khác rỗng, không giao nhau của A và hợp của chúng là tập A

$\{A_i\}$ là phân hoạch của A nếu:

- + $A_i \neq \emptyset \forall i$

- + $A_i \cap A_j = \emptyset \forall i \neq j$

- + $\bigcup_i A_i = A$

- ✘ Ví dụ: $A = \{1, 2, 3\}$ có bao nhiêu phân hoạch?

PHÂN HOẠCH

× Định lý:

Nếu R là một quan hệ tương đương trên A thì các lớp tương đương của R là một phân hoạch của A

Ngược lại, cho trước một phân hoạch của A , tồn tại một quan hệ tương đương nhận các tập trong phân hoạch trên là một lớp tương đương của quan hệ đó.

BÀI TẬP

3-5 trang 16

4. Consider these relations on the set of integers:

$$R_1 = \{(a, b) \mid a = b \text{ or } a = -b\}$$

$$R_2 = \{(a, b) \mid a = b + 1\}$$

Which of these relations contain each of the pairs $(1, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(1, -1)$, and $(2, 2)$?

Which of the relations are symmetric?

Antisymmetric?

5. Determine whether the relation R on the set of all people is reflexive, symmetric, antisymmetric, and/or transitive, where $(a,$

$b) \in R$ if and only if

a) a is taller than b .

b) a and b were born on the same day.

c) a has the same first name as b .

d) a and b have a common grandparent.

6. Define three equivalence relations on the set of students in your discrete mathematics class different from the relations discussed in the text. Determine the equivalence classes for each of these equivalence relations.

ÁNH XẠ

- ✘ Các khái niệm cơ bản
- ✘ Một số loại ánh xạ

ĐỊNH NGHĨA

- ✘ Cho $X, Y \neq \emptyset$. Ánh xạ f từ X vào Y là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử $x \in X$ với một và chỉ một phần tử $y \in Y$
- ✘ Ký hiệu:

$$f: X \rightarrow Y$$

$$x \mapsto y = f(x)$$

- + X : Tập nguồn, Y : Tập đích
- + $y = f(x)$ được gọi là ảnh của x qua ánh xạ f
- ✘ Ví dụ: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 2 + x$

ẢNH VÀ NGHỊCH ẢNH

Cho ánh xạ: $f: X \rightarrow Y; x \mapsto y = f(x); A \subset X; B \subset Y$

✘ Ảnh của tập A: $f(A)$

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\} = \{y \in Y | \exists x \in X; f(x) = y\}$$

Ví dụ: $f(x) = x^2 + 3; f([-3, 4]) = ?$

✘ Nghịch ảnh của tập B: $f^{-1}(B)$

$$f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\}$$

Ví dụ: $f(x) = x^2 + 3; f^{-1}([-3, 4]) = ?$

ĐƠN ÁNH, SÓNG ÁNH, TOÀN ÁNH

Cho ánh xạ $f: X \rightarrow Y$

- ✘ Đơn ánh: $\forall x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$
 - $\Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
 - $\Leftrightarrow f(x) = y$ luôn có không quá một nghiệm
- ✘ Toàn ánh: $f(X) = Y \Leftrightarrow f(x) = y$ luôn có nghiệm
- ✘ Sóng ánh = đơn ánh + toàn ánh
- ✘ Ví dụ: $f(x) = (2x^2 + 5x - 2)/(x^2 + 1) \quad (\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R})$

TÍCH ẢNH XẠ

Cho hai ánh xạ: $f: X \rightarrow Y$; $g: Y \rightarrow Z$

- ✘ Ánh xạ $h: X \rightarrow Z$ xác định bởi: $h(x) = g(f(x))$ với $x \in X$ gọi là ánh xạ tích của f và g .

Kí hiệu: $g \circ f$

- ✘ Ví dụ: $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = 2x + 3$$

$$g(x) = x^2 + 4$$

Xác định $f \circ g$ và $g \circ f$

ÁNH XẠ NGƯỢC

- ✘ Cho song ánh $f: X \rightarrow Y$. Khi đó, với mỗi $y \in Y$, tồn tại duy nhất một giá trị $x \in X$ sao cho $f(x) = y$ hay $f^{-1}(y) = x$

Như vậy, ta có ánh xạ:

$$f^{-1}: Y \rightarrow X$$

$$y \mapsto x = f^{-1}(y)$$

Ánh xạ này gọi là ánh xạ ngược của ánh xạ f .

- ✘ Ví dụ: $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f(x) = 2x + 3; g(x) = x^2 + 4$

Tìm ánh xạ ngược của f, g (nếu có)

BÀI TẬP

1. Determine if the function $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ defined by $f(x) = x^3 + 1$ is a surjection?
2. Show that the transformation $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ defined by: $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ is a bijection.
3. The func $f: [0, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ defined by $f(x) = 1 + x^2$ ($x \geq 0$)
 - a. Given $A = [-1, 5]$. Find $f(A)$ and $f^{-1}(A)$.
 - b. Find this inverse
4. Given the function $f(x) = x^3 - x$ from $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Find a domain A so that f is a bijection.